苏教版高中数学必修2电子课本

目　　录

书　　名　普通高中课程标准实验教科书·数学 2(必修)
主　　编　单　墫
责任编辑　蔡　立
出版发行　江苏教育出版社
地　　址　南京市马家街 31 号(邮编 210009)
网　　址　http://www.1088.com.cn
集团地址　江苏出版集团(南京市中央路 165 号　210009)
集团网址　凤凰出版传媒网 http://www.ppm.cn
经　　销　江苏省新华发行集团有限公司
照　　排　南京展望文化发展有限公司
印　　刷
厂　　址　电话
开　　本　毫米
印　　张
插　　页
字　　数
版　　次　200　年　月第　版
　　　　　200　年　月第　次印刷
印　　数　1—　册
书　　号　ISBN　7-5343-
定　　价　元
邮购电话　025-85400774，8008289797
盗版举报　025-83204538

苏教版图书若有印装错误可向承印厂调换
欢迎邮购，提供盗版线索者给予重奖

主　　编　单　墫

副 主 编　李善良　陈永高　王巧林

本册主编　徐稼红

编写人员　徐稼红　于　明　孙旭东　葛　军　单　墫

参与设计　尤建功　钱定边　张乃达　仇炳生　周焕山

数学是科学的大门和钥匙.

——伽利略

一种科学只有在成功地运用数学时,才算达到完善的地步.

——马克思

致　同　学

亲爱的同学,你感到高中阶段的学习生活有趣吗?

我们知道,数学与生活紧密相连.数学可以帮助我们认识世界,改造世界,创造新的生活.数学是高中阶段的重要学科,不仅是学习物理、化学等学科的基础,而且对我们的终身发展有较大的影响.

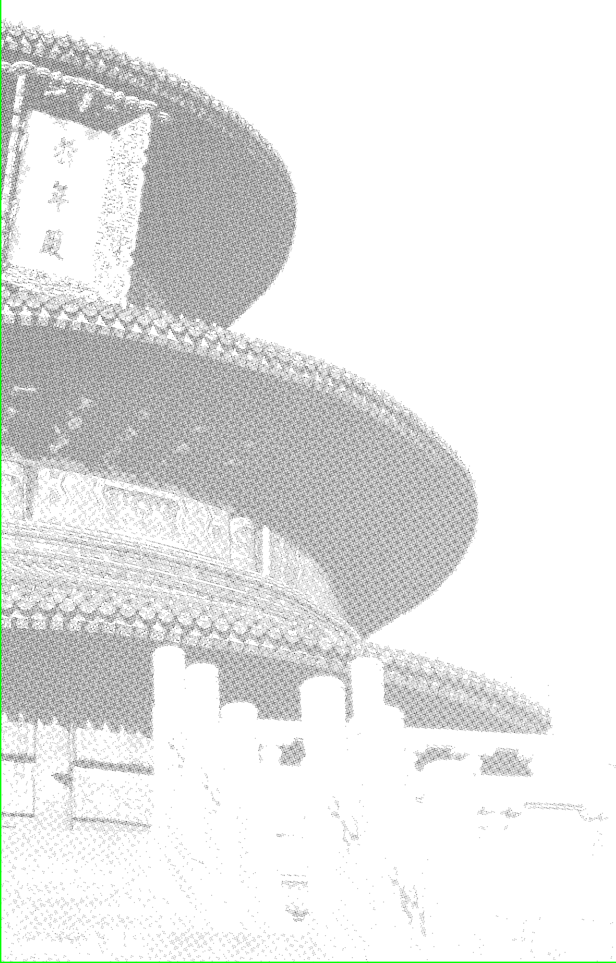
面对实际问题,我们要认真观察、实验、归纳,大胆提出猜想.为了证实或推翻提出的猜想,我们要通过分析,概括、抽象出数学概念,通过探究、推理,建立数学理论.我们要积极地运用这些理论去解决问题.在探究与应用过程中,我们的思维水平会不断提高,我们的创造能力会得到发展.在数学学习过程中,我们将快乐地成长.

考虑广大同学的不同需要,本书提供了较大的选择空间.

书中的引言、正文、练习、习题中的“感受·理解”部分、阅读、回顾等内容构成一个完整的体系.它体现了教材的基本要求,是所有学生应当掌握的内容.相信你一定能学好这部分内容.

本书还设计了一些具有挑战性的内容,包括思考、探究、链接,以及习题中的“思考·运用”、“探究·拓展”等,以激发你探索数学的兴趣.在掌握基本内容之后,选择其中一些内容作思考与探究,你会更加喜欢数学.

第 3 章　立体几何初步



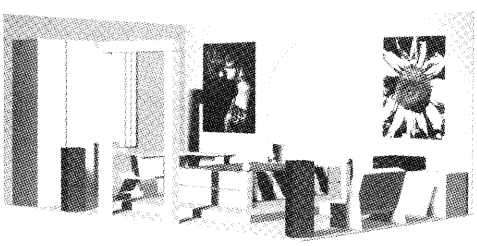
- 立体几何初步
  - 空间几何体
    - 棱柱、棱锥和棱台
    - 圆柱、圆锥、圆台和球
    - 中心投影和平行投影
    - 直观图画法
  - 点、线、面之间的位置关系
    - 平面的基本性质
    - 空间两条直线的位置关系
      - 平行直线
      - 异面直线
    - 直线与平面的位置关系
      - 直线与平面平行
      - 直线与平面垂直
    - 平面与平面的位置关系
      - 两平面平行
      - 两平面垂直
  - 柱、锥、台、球的表面积和体积
    - 空间图形的展开图
    - 柱、锥、台、球的体积

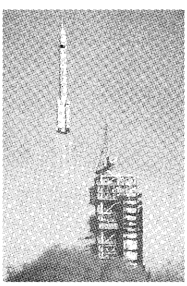
几何学的简洁美却又正是几何学之所以完美的核心所在.

——牛顿

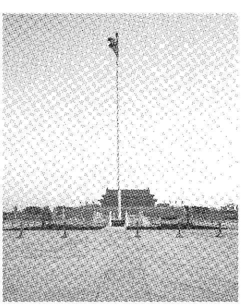
从土木建筑到家居装潢，从机械设计到商品包装，从航空测绘到零件视图……空间图形与我们的生活息息相关.

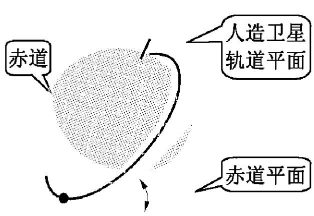
例如，下面是某居室的设计图和中国“神舟五号”载人飞船升空时的场景，其中蕴含了丰富的空间图形.





空间图形的研究非常重要. 例如，如何检查墙面或旗杆是否与地平面垂直？如何刻画人造地球卫星轨道平面与赤道平面所成的“角”？要解决这类问题，就要用到空间图形的相关知识.





在本章中，我们主要解决下面的问题：

空间几何体是由哪些基本几何体组成的？

如何描述和刻画这些基本几何体的形状和大小？

构成这些几何体的基本元素之间具有怎样的位置关系？

空间几何体

复杂的几何体，通常是由一些简单几何体(如柱、锥、台、球)组合而成的.

柱、锥、台、球分别具有怎样的结构特征?

如何在平面上表示空间几何体?

下面我们先从直观上加以讨论.

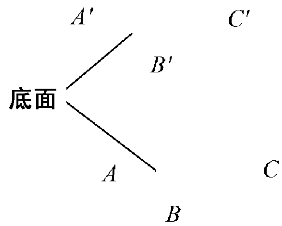
仔细观察下面的几何体，它们有什么共同特点?

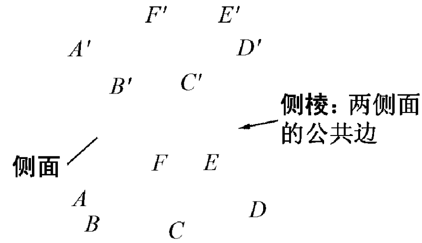
(1)　　(2)　　(3)　　(4)

图 3－1－1(1)和图 3－1－1(3)中的几何体分别由平行四边形和五边形沿某一方向平移而得(图 3－1－2).

一般地，由一个平面多边形沿某一方向平移形成的空间几何体叫做　(prism). 平移起止位置的两个面叫做棱柱的　(base)，多边形的边平移所形成的面叫做棱柱的　(lateral face).

图 3－1－3 和图 3－1－4 给出了棱柱中一些常用名称的含义.





底面为三角形、四边形、五边形……的棱柱分别称为三棱柱、四棱柱、五棱柱……例如，图 3－1－3 为三棱柱，图 3－1－4 为六棱柱，并分别记作棱柱 $ABC-A'B'C'$、棱柱 $ABCDEF$-$A'B'C'D'E'F'$.

我们发现，棱柱具有如下特点：

两个底面是全等的多边形，且对应边互相平行，侧面都是平行四边形.

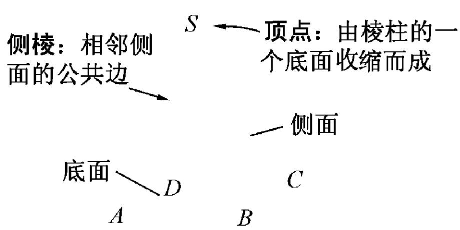
下面的几何体有什么共同特点？与前面的图 3－1－1 进行对比，前后发生了什么变化？

(1) (2) (3) (4)

图 3－1－1 中棱柱的一个底面收缩为一个点时，可得到图 3－1－5.

当棱柱的一个底面收缩为一个点时，得到的几何体叫做 (pyramid).

与棱柱相仿，图 3－1－6 给出了棱锥中一些常用名称的含义.

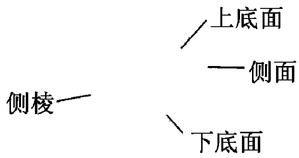


我们发现，棱锥具有如下特点：

底面是多边形，侧面是有一个公共顶点的三角形.

用一个平行于棱锥底面的平面去截棱锥，得到两个几何体，一个

仍然是棱锥,另一个我们称之为棱台(图 3－1－7). 即 (truncated pyramid)是棱锥被平行于底面的一个平面所截后,截面和底面之间的部分.



画一个四棱柱和一个三棱台.

如图 3－1－8,画四棱柱可分三步完成:

画上底面——画一个四边形;

画侧棱——从四边形的每一个顶点画平行且相等的线段;

画下底面——顺次连结这些线段的另一个端点.

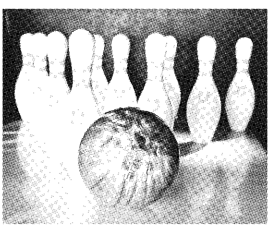
如图 3－1－9,画三棱台的方法是:画一个三棱锥,在它的一条侧棱上取一点,从这点开始,顺次在各个侧面内画出与底面对应边平行的线段,将多余的线段擦去.

棱柱、棱锥和棱台都是由一些平面多边形围成的几何体. 由若干个平面多边形围成的几何体叫做 (polyhedron). 在现实世界中,存在着形形色色的多面体,如食盐、明矾、石膏等的晶体都呈多面体形状(图 3－1－10).

食盐晶体　　明矾晶体　　石膏晶体

1. 平移是指将一个图形上所有的点按某一确定的方向移动相同的距离. 请说出图 3－1－1(2)、(4)中的棱柱分别通过何种多边形平移得到.
2. 右图中的几何体是不是棱台？为什么？
3. 分别画一个三棱锥和一个四棱台.
4. 多面体至少有几个面？这个多面体是怎样的几何体？

下面的几何体与多面体不同，仔细观察这些几何体，它们有什么共同特点或生成规律？



(1)　(2)　(3)　(4)

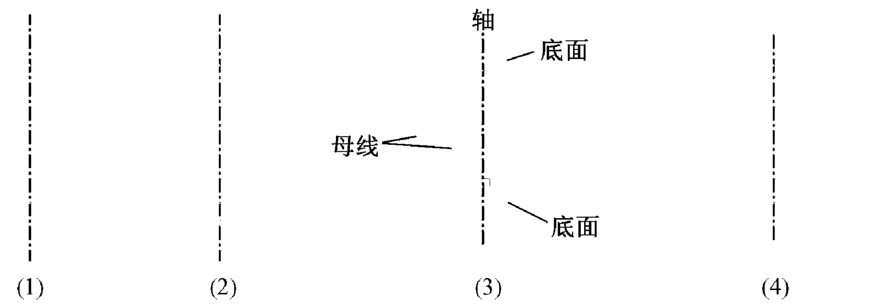
这类几何体往往可以在车床上通过旋转切削加工得到，它们都可以看做由一个平面图形通过旋转而生成的.

例如，图 3－1－11(1)中的几何体是矩形绕其一边旋转而成的几何体.

图 3－1－11(2)，(3)，(4)中的几何体分别是什么平面图形通过旋转而成？在生产和生活中，还有哪些几何体具有类似的生成规律？

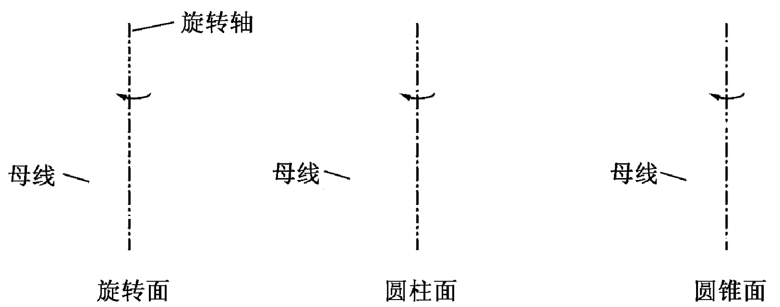
将矩形、直角三角形、直角梯形分别绕着它的一边、一直角边、垂直于底边的腰所在的直线旋转一周，形成的几何体分别叫做 (circular cylinder)、 (circular cone)、 (circular truncated cone)，这条直线叫做 ，垂直于轴的边旋转而成的圆面叫做 ，不垂直于轴的边旋转而成的曲面叫做 ，无论旋转到什么位置，这条

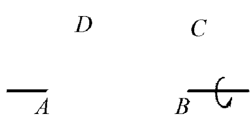
边都叫做　　（图 3－1－12）.



半圆绕着它的直径所在的直线旋转一周而形成的几何体叫做 (sphere)，半圆弧旋转而成的曲面叫做　　.

一般地，一条平面曲线绕它所在的平面内的一条定直线旋转所形成的曲面叫做　　（图 3－1－13），封闭的旋转面围成的几何体称为　　. 圆柱、圆锥、圆台和球都是特殊的旋转体.





如图 3－1－14，将直角梯形 $ABCD$ 绕 AB 边所在的直线旋转一周，由此形成的几何体是由哪些简单几何体构成的？

这个几何体是由圆柱和圆锥组合而成的，如图 3－1－15.

从例 1 看出，一些复杂的几何体是由简单几何体组合而成的.

指出图 3－1－16、图 3－1－17 中的几何体是由哪些简单几何体构成的？

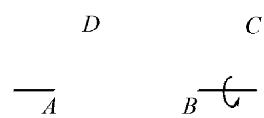
图 3－1－16 中的几何体是一个六棱柱挖去一个圆柱所构成的.

图 3－1－17 中的几何体可以看做是一个长方体割去一个四棱柱所得的几何体，也可以看成是一个长方体与两个四棱柱组合而成的几何体(图 3－1－18). 实际上，图 3－1－17 也是一个柱体，它的底面为一个凹多边形.

割去四棱柱　　　　补上四棱柱

选择一些平面曲线，绕其所在平面的一条直线旋转，想像其生成的曲面，你能画出它的示意图吗?

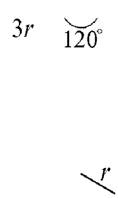
1. 指出下列几何体分别由哪些简单几何体构成.



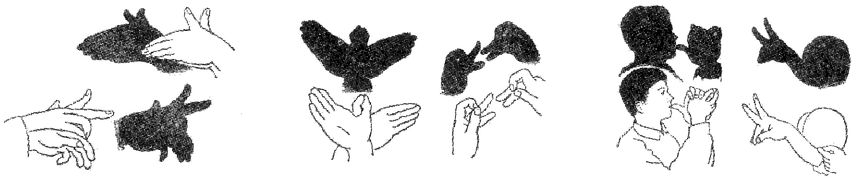
2. 如图，将 ▱$ABCD$ 绕 AB 边所在的直线旋转一周，由此形成的几何体是由哪些简单几何体构成的?

3. 充满气的车轮内胎可以通过什么图形旋转生成?

4. 用厚纸按如下三个图样画好后剪下，再沿图中虚线折起来粘好. 它们分别是什么几何体?(保存好所做的模型，为下一节课作准备)

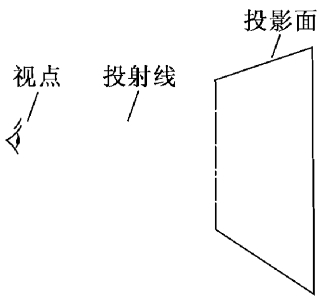


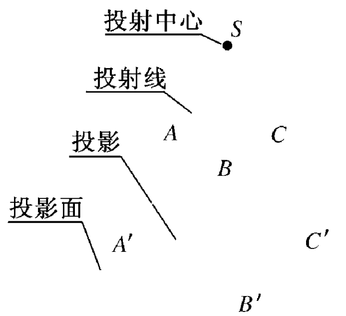
物体在灯光或日光的照射下，就会在地面或墙壁上产生影子，这是一种自然现象.　　(project)就是由这类自然现象抽象出来的.生活中有许多利用投影的例子，如手影表演、皮影戏等(图 3－1－19).



　　是光线(　　)通过物体，向选定的面(　　)投射，并在该面上得到图形的方法.

投射线交于一点的投影称为　　，如图 3－1－20 所示.



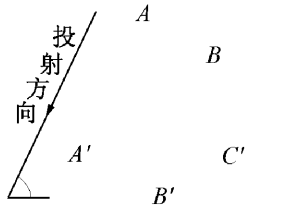


中心投影形成的直观图能非常逼真地反映原来的物体，因此主要运用于绘画领域，也常用来概括地描绘一个结构或一个产品的外貌.由于中心投影的投影中心、投影面和物体的相对位置改变时，直观图的大小和形状亦将改变，因此工程制图或技术图样一般不采用中心投影，而采用平行投影的方法.

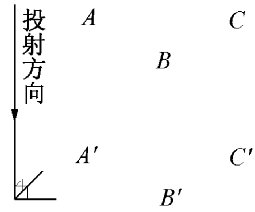
投射线相互平行的投影称为　　，平行投影按投射方向是否正对着投影面，可分为　　和　　两种，如图 3－1－21 所示.

本节主要学习利用正投影绘制空间图形的三视图，并能根据所给的三视图了解该空间图形的基本特征.

　　(view)是指将物体按正投影向投影面投射所得到的图形.光线自物体的前面向后投射所得的投影称为　　或　　，自上向下的称为　　，自左向右的称为　　，用这三种视图刻画空间物

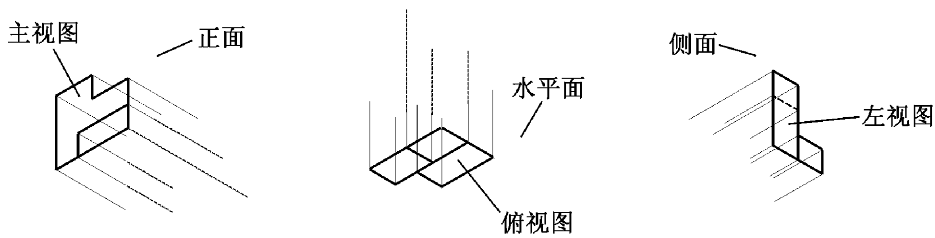


斜投影

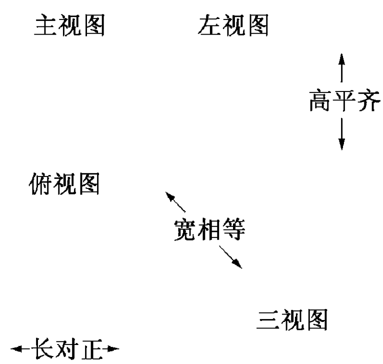


正投影

体的结构，我们称之为 ，如图 3－1－22 所示.



如图 3－1－23，画三视图时应注意：主视图与左视图的高要保持平齐，主视图与俯视图的长应对正，俯视图与左视图的宽度应相等.



画出下列几何体的三视图（图 3－1－24）.

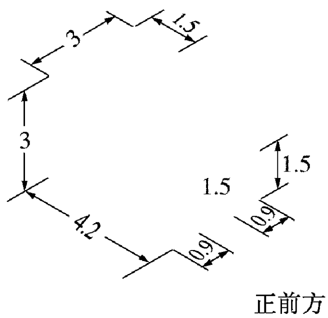
画三视图之前，先把几何体的结构弄清楚. 图 3－1－24(1)为第 10 页练习第 4 题中的模型，图 3－1－24(2)是圆台和球组成的几何体，图 3－1－24(3)为圆柱和六棱柱的组合体. 在绘制三视图时要将被遮挡的部分用虚线表示出来.

(1) (2) (3)

这三个几何体的三视图如图 3－1－25 所示.

(1) (2) (3)

如图 3－1－26，设所给的方向为物体的正前方，试画出它的三视图(单位：cm).



按 1∶2 比例绘制的三视图如图 3－1－27 所示.

1. 画出下列各几何体的三视图(中间的几何体是第 10 页练习第 4 题中的模型，涂色的面为视角的正面).

2. 三个几何体的三视图如图所示，它们分别是什么几何体?

(1) (2) (3)

3. 某建筑由相同的若干个房间组成，该楼的三视图如图所示，试问：

(1) 该楼有几层？共有多少个房间？

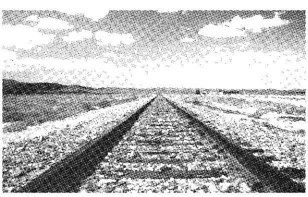
(2) 最高一层的房间在什么位置？画出此楼的大致形状.

主视图　　左视图

俯视图

正投影主要用于绘制三视图，在工程制图中被广泛采用. 但三视图的直观性较差，因此绘制物体的直观图一般采用斜投影或中心投影(图 3 - 1 - 28).

(1)　　(2)　　(3)



在中心投影(透视)中，水平线(或垂直线)仍保持水平(或垂直)，但斜的平行线则会相交(如左图中的铁轨)，交点称为　　. 在图 3 - 1 - 28(2)、(3)中分别有一个和两个消点，水平(或垂直)线仍保持水平(或垂直).

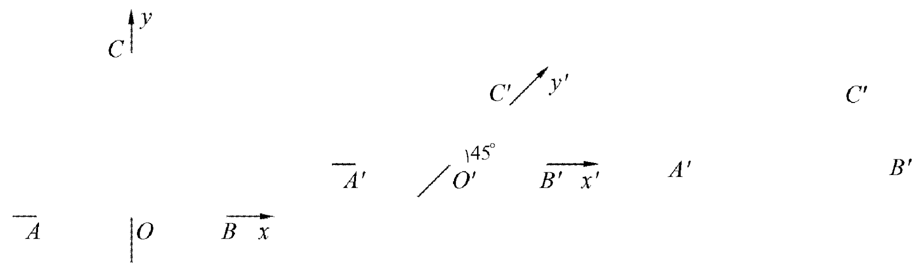
中心投影(透视)虽然可以显示空间图形的直观形象，但作图方法比较复杂，又不易度量，因此在立体几何中通常采用斜投影来画空间图形的直观图. 我们先看两个具体的例子.

画水平放置的正三角形的直观图.

如图 3 - 1 - 29，按如下步骤完成：

在已知的正三角形 ABC 中，取 AB 所在的直线为 x 轴，取对称轴 CO 为 y 轴. 画对应的 x' 轴、y' 轴，使 $\angle x'O'y' = 45°$.

在 x' 轴上取 $O'A' = OA$，$O'B' = OB$，在 y' 轴上取 $O'C'$

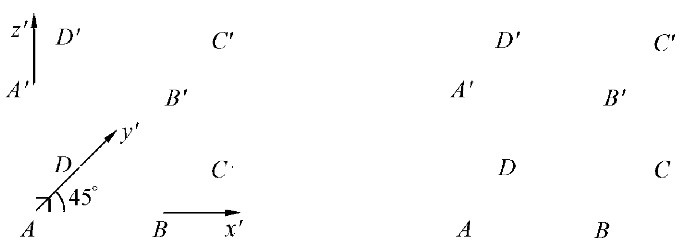


$=\frac{1}{2}OC$.

连结 $A'C'$, $B'C'$,所得三角形 $A'B'C'$ 就是正三角形 ABC 的直观图.

画棱长为 2 cm 的正方体的直观图.

如图 3－1－30,按如下步骤完成:



作水平放置的正方形的直观图 $ABCD$,使 $\angle BAD=45°$,$AB=2$ cm,$AD=1$ cm.

过 A 作 z' 轴,使 $\angle BAz'=90°$. 分别过点 B, C, D 作 z' 轴的平行线,在 z' 轴及这组平行线上分别截取 $AA'=BB'=CC'=DD'=2$ cm.

连结 $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'A'$,得到的图形就是所求的正方体直观图.

上面画直观图的方法叫做 (oblique axonometry),其规则是:

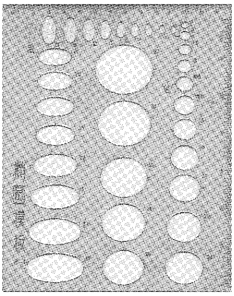
(1) 在空间图形中取互相垂直的 x 轴和 y 轴,两轴交于 O 点,再取 z 轴,使 $\angle xOz=90°$,且 $\angle yOz=90°$.

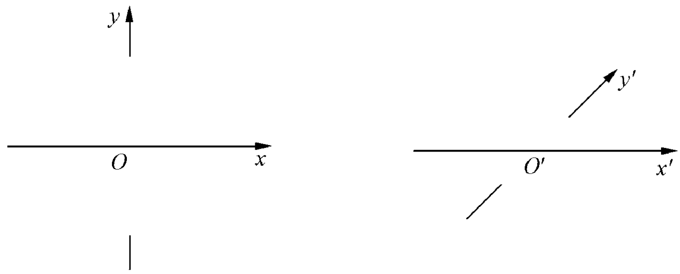
(2) 画直观图时把它们画成对应的 x' 轴、y' 轴和 z' 轴,它们相交于 O',并使 $\angle x'O'y'=45°$(或 135°),$\angle x'O'z'=90°$,x' 轴和 y' 轴所确定的平面表示水平平面.

(3) 已知图形中平行于 x 轴、y 轴或 z 轴的线段,在直观图中分别画成平行于 x'轴、y'轴或 z'轴的线段.

（4）已知图形中平行于 x 轴和 z 轴的线段，在直观图中保持原长度不变；平行于 y 轴的线段，长度为原来的一半.

圆柱、圆锥和圆台的底面都是圆. 水平放置的圆的直观图应该画成椭圆(图 3－1－31). 在本章中，可以使用椭圆模板绘制水平放置的圆的直观图.





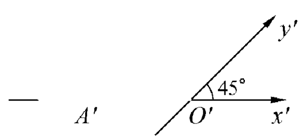
1. 下列图形中，采用中心投影(透视)画法的是________.

(1)　　(2)　　(3)　　(4)

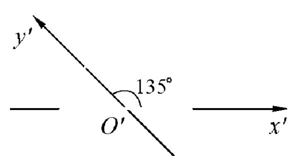
2. 用斜二测画法画出下列水平放置图形的直观图.

(1)　　(2)

3. 下列图形表示水平放置图形的直观图，画出它们原来的图形.



(1)

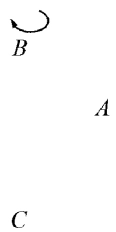


(2)

4. 根据下面的三视图，画出相应空间图形的直观图.

(1) (2)

1. 三棱柱、六棱柱分别可以看成是哪个多边形平移形成的几何体?
2. 如图,将$\triangle ABC$绕BC边所在的直线旋转一周,由此形成的几何体是由哪些简单几何体构成的?画出这个几何体的大致形状.
3. 分别画出下述几何体的三视图(涂色面为正方向).



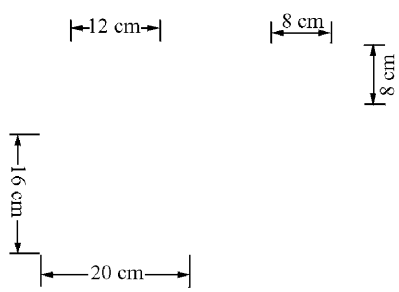
(1) (2) (3)

4. 根据下面空间图形的三视图,画出空间图形的大致形状.

(1) (2)

5. 选择日常生活中的一个几何体,画出它的三视图和直观图.

6. 某几何体的三视图如下,该几何体是棱台吗?



7. 一个无盖的正方体盒子展开后的平面图如图所示，A，B，C 是展开图上的三点，则在正方体盒子中，$\angle ABC$ 的度数是多少？

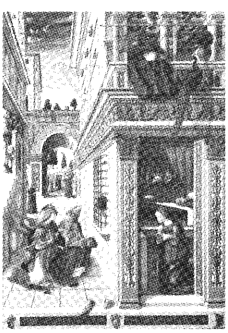
B A

C

8. 已知三视图轮廓的孔形样板（如图），试找出一个塞子，使得它能堵住孔形样板上的每一个洞.

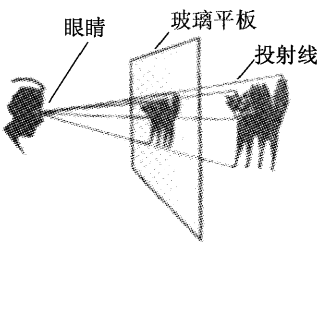
9. （操作题）有位木匠师傅指导他的徒弟们制作楔形榫.在他们完成几次一般性的练习之后，师傅拿出一个由两块木头合成的立方体木块（如图）给他们看，两块木头的接合处在立方体的 4 个垂直面上都形成楔形榫的形状，且四面看起来完全一样. 师傅要徒弟们照样做一个，但他们不知道该如何下手. 这到底是怎么做的呢？

艺术家的透视法·年希尧的《视学》



透视法的起源应归功于文艺复兴时期的意大利艺术家. 这时期的艺术家们的观点改变了，不再像中世纪那样把绘画和雕塑的目的局限于为圣经插图、颂扬上帝，而是把描绘现实世界作为目的. 他们开始认真地研究如何在绘画中真实地再现自然风光和人物情态. 他们也热心研究几何，其目的是为了把三维的现实世界真实地绘制在二维的画布上，由此产生了透视法.

意大利数学家、艺术家阿尔贝蒂（Alberti，1404～1472）于 1435 年发表《论绘画》，阐述了最早的数学透视法原理，引入了投影线和截景等概念. 他设想在人眼和景物之间插立一张玻璃平板. 当眼睛（指一只眼）向景物发出投射线时，由投射线和玻璃平板的交点所形成的点集叫做一个截景. 截景给人的印象就如同景物本身一样. 因此，如果所作的画和截景一样，就会显得很逼真. 阿尔贝蒂的透视法逐渐被画家们采用并加以改进.

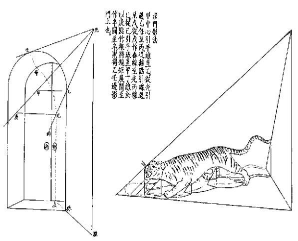


天才艺术家达·芬奇（Leonardo da Vinci，1452～1519）学识渊博，他十分重视数学的作用. 他说："一个人如果怀疑数学的极端可靠性就是陷入混乱."他认为大自然按照数学规律运转，自然界的力和运动必须通过对数量的研究来探讨. 只有紧紧地依靠数学，才能穿透那不可捉摸的思想迷雾. 他在绘画实践中，娴熟地运用了数学透视法原理. 他写了一本谈透视法的书《绘画专论》. 书中认为一幅画必须是实体的精确的再现，并坚信运用数学透视法能够做到这一点. 他认为

绘画也是一种科学,因为它揭示了自然界的真实性.在达·芬奇的倡导下,学习和应用透视法成为欧洲画家们的自觉行动.

中国清代宫廷画师年希尧(? ～1738)从青年时代起就对数学和制图技术有兴趣.他在北京时认识了一名意大利画家郎世宁(Giuseppe Castiglione, 1688～1766).年希尧向他学习了透视知识,并且从他那里得到一本讲透视的书,爱不释手.深入钻研的结果,他不仅洞悉原著,还产生了一些自己的创见.于是他以原著为基础,加入自己的见解,并补充了大量的图形,写成了《视学》一书,于1729年出版.

《视学》出版之后,年希尧觉得“终不免于肤浅”,于是继续研究.一边和郎世宁“往复再四,究其源流”,一边从中国古籍中寻找相关资料.经“苦思力索,补缕五十余图,并附图说”,于1735年出了修订版.



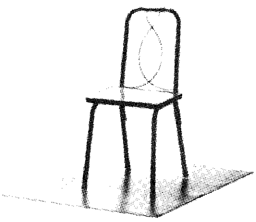
《视学》一书最精彩的部分是图形.图形分为两大类:直观图(立体图)和平面图.直观图从画法原理上看又分轴测图和透视图,平面图分二视图和三视图,其原理和现代工程制图完全一致.年希尧对于透视原理论述清楚,对于投影关系也处理得很好,他想像一个物体悬在空中,各点投影用虚线连接,一看就知道平面上的某个点是物体上哪个点的投影.

中国古籍中也有立体图和平面图的画法,始于东汉,现在能看到的如北宋时《武经总要》的兵器图、《新代象法要》中的天文仪器图、《营造法式》中的建筑图等,而且画得越来越好,但是总的来说还比较粗糙,缺乏透视原理的说明,因而显得不够科学.因此,年希尧的《视学》在中国是前无古人的;在世界上也堪称早期画法几何的代表作,比法国数学家蒙日(Monge, 1746～1818)于1799年出版的名著《画法几何学》早70年.

点、线、面之间的位置关系

在上一节，我们已经对简单的几何体有了直观的认识. 简单的几何体是由空间的点、线、面所构成的，本节我们将对点、线、面的位置关系作进一步的讨论.

空间的点、直线和平面具有怎样的位置关系？
如何用数学语言来表述和研究这些位置关系？



用两个合页和一把锁就可以将一扇门固定，将一把直尺置于桌面上，通过是否漏光就能检查桌面是否平整，为什么？

椅子放不稳，是地面不平还是椅子本身有问题？

上面的问题都和平面的基本性质有关.

广阔的草原、平静的湖面都给我们以平面的形象. 和点、直线一样，平面也是从现实世界中抽象出来的几何概念. 平面通常用平行四边形来表示，当平面水平放置的时候，一般用水平放置的正方形的直观图作为平面的直观图(图 3－2－1).

平面通常用希腊字母 α, β, γ, …来表示，也可以用表示平行四边形的对角顶点的字母来表示，如图 3－2－1 中的平面 α、平面 AC 等.

D　　C

A　α　　B　　　　α　A　　B

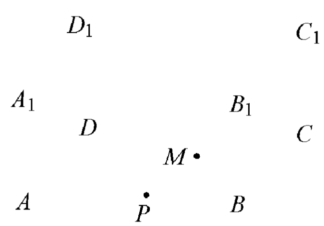
在生产与生活中，人们经过长期的观察与实践，总结出关于平面的三个基本性质. 我们把它们当作公理，作为进一步推理的基础.

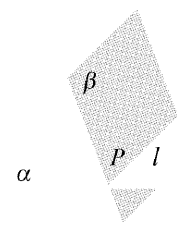
公理 1　如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内(图 3－2－2).

这时我们说直线在平面内，或者说平面经过直线. “将一把直尺置于桌面上，通过是否漏光就能检查桌面是否平整”，就是基于这个基本性质.

空间中点、直线、平面的位置关系，可以借用集合中的符号来表示. 例如，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中(图 3－2－3)：

位置关系	符号表示
点 P 在直线 AB 上	$P \in AB$
点 C 不在直线 AB 上	$C \notin AB$
点 M 在平面 AC 内	$M \in$ 平面 AC
点 A_1 不在平面 AC 内	$A_1 \notin$ 平面 AC
直线 AB 与直线 BC 交于点 B	$AB \cap BC = B$
直线 AB 在平面 AC 内	$AB \subset$ 平面 AC
直线 AA_1 不在平面 AC 内	$AA_1 \not\subset$ 平面 AC





这样,公理 1 就可以用符号表示为(图 3-2-2):

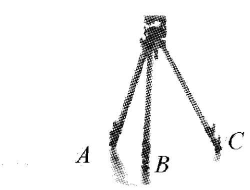
$$\left.\begin{array}{l} A \in \alpha \\ B \in \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \text{直线 } AB \subset \alpha.$$

公理 2　如果两个平面有一个公共点,那么它们还有其他公共点,这些公共点的集合是经过这个公共点的一条直线(图 3-2-4).

如果两个平面有一条公共直线,则称这两个平面相交,这条公共直线叫做这两个平面的　　.教室里相邻的墙面在地面的墙角处有一个公共点,那么它们就交于过这个点的一条直线.

公理 2 可用符号表示为(图 3-2-4):

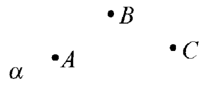
$$\left.\begin{array}{l} P \in \alpha \\ P \in \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \cap \beta = l \text{ 且 } P \in l.$$

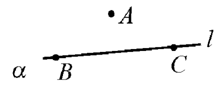


公理 3　经过不在同一条直线上的三点,有且只有一个平面(图 3-2-5).

"用两个合页和一把锁就可以将一扇门固定"、"照相机支架只需三条腿就够了"都是基于这个基本性质.公理 3 也可简单地说成,不共线的三点确定一个平面.

过不共线三点 A，B，C 的平面(图 3－2－5)通常记作“平面 ABC”.





根据上述公理，可以得出下面的推论：

推论 1　经过一条直线和这条直线外的一点，有且只有一个平面(图 3－2－6).

已知：直线 l，点 $A\notin l$(图 3－2－6).

求证：过直线 l 和点 A 有且只有一个平面.

先在直线 l 上任取两点 B，C，这样 A，B，C 三点就确定一个平面，再证明 l 在这个平面内.

在直线 l 上任取两点 B，C.

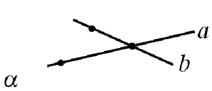
因为点 A 不在直线 l 上，
根据公理 3，经过不共线三点 A，B，C 有一个平面 α.

因为 $B\in\alpha$，$C\in\alpha$，
所以根据公理 1，$l\subset\alpha$，
即平面 α 经过直线 l 和点 A.

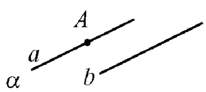
因为 B，C 在 l 上，
所以经过直线 l 和点 A 的平面一定经过点 A，B，C.

于是再根据公理 3，经过不共线的三点 A，B，C 的平面只有一个，所以经过直线 l 和点 A 的平面只有一个.

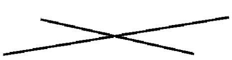
类似地，我们可以得出下面两个推论：



推论 2　经过两条相交直线，有且只有一个平面(图 3－2－7).



推论 3　经过两条平行直线，有且只有一个平面(图 3－2－8).

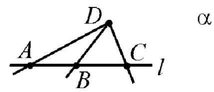


如图 3－2－9，用两根细绳沿桌子四条腿的对角拉直，如果这两根细绳相交，说明桌子四条腿的底端在同一平面内，否则就不在同一平面内，其依据就是推论 2.

已知：$A\in l$，$B\in l$，$C\in l$，$D\notin l$(图 3－2－10).

求证：直线 AD，BD，CD 共面.

因为直线 l 与点 D 可以确定平面 α，所以只需证明 AD，BD，CD 都在平面 α 内.



$\because D \notin l$，

$\therefore l$ 与 D 可以确定平面 α(推论 1).

又 $\because A \in l$，

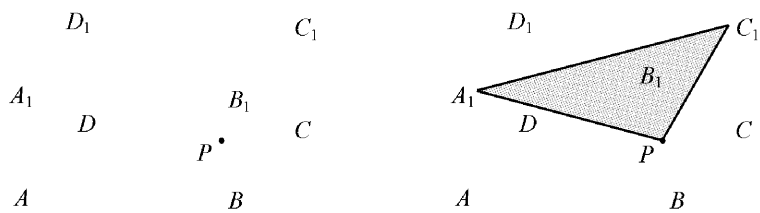
$\therefore A \in \alpha$，又 $D \in \alpha$，

$\therefore AD \subset \alpha$(公理 1).

同理，$BD \subset \alpha$，$CD \subset \alpha$，

$\therefore AD$，BD，CD 在同一平面 α 内，即它们共面.

如图 3－2－11(1)，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为棱 BB_1 的中点，画出由 A_1，C_1，P 三点所确定的平面 α 与长方体表面的交线.



(1)　　(2)

因为点 P 既在平面 α 内又在平面 AB_1 内，所以点 P 在平面 α 与平面 AB_1 的交线上. 同理，点 A_1 在平面 α 与平面 AB_1 的交线上. 因此，PA_1 就是平面 α 与平面 AB_1 的交线.

连结 A_1P，PC_1，A_1C_1，

它们就是平面 α 与长方体表面的交线(图 3－2－11(2)).

1. 为什么许多自行车后轮旁只安装一只撑脚?

2. 用符号表示“点 A 在直线 l 上，l 在平面 α 外”，正确的是(　　).

A. $A \in l$，$l \notin \alpha$　　B. $A \in l$，$l \not\subset \alpha$　　C. $A \subset l$，$l \not\subset \alpha$　　D. $A \subset l$，$l \notin \alpha$

3. 下列叙述中，正确的是(　　).

A. 因为 $P \in \alpha$，$Q \in \alpha$，所以 $PQ \in \alpha$

B. 因为 $P \in \alpha$，$Q \in \beta$，所以 $\alpha \cap \beta = PQ$

C. 因为 $AB \subset \alpha$，$C \in AB$，$D \in AB$，所以 $CD \in \alpha$

D. 因为 $AB \subset \alpha$，$AB \subset \beta$，所以 $A \in (\alpha \cap \beta)$ 且 $B \in (\alpha \cap \beta)$

4. 若 $A \in \alpha$，$B \notin \alpha$，$A \in l$，$B \in l$，那么直线 l 与平面 α 有____个公共点.

5. 请指出下列说法是否正确，并说明理由：

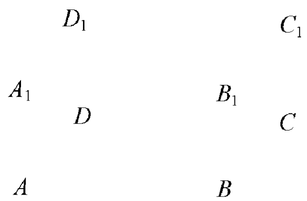
(1) 空间三点确定一个平面；

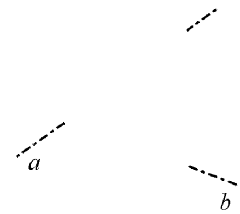
(2) 平面 α 与平面 β 若有公共点，就不止一个；

(3) 因为平面型斜屋面不与地面相交，所以屋面所在的平面与地面不相交.

平面内两条直线的位置关系只有平行和相交两种，那么空间两条直线的位置关系有哪些呢？

观察如图 3－2－12 所示的长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，可以看出，空间两条直线除了相交、平行两种位置关系外，还有第三种位置关系. 例如，直线 A_1B_1 与 BC、A_1B_1 与 CC_1 等既不相交又不平行，即不同在任何一个平面内. 又如，图 3－2－13 中机械部件蜗杆和蜗轮的轴线 a 和 b，它们同样也是既不相交又不平行.





我们把不同在任何一个平面内的两条直线叫做 (skew lines).

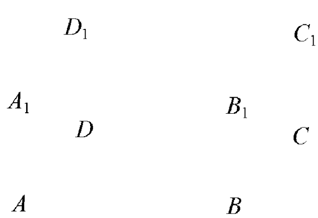
因此，空间两条直线的位置关系有以下三种：

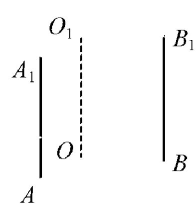
位置关系	共面情况	公共点个数
相交直线	在同一平面内	有且只有一个
平行直线	在同一平面内	没有
异面直线	不同在任何一个平面内	没有

在平面几何中，同一平面内的三条直线 a, b, c，如果 $a/\!/b$ 且 $b/\!/c$，那么 $a/\!/c$. 这个性质在空间是否成立呢？

如图 3－2－14，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1 /\!/ BB_1$，$CC_1 /\!/ BB_1$，通过观察可以看出 $AA_1 /\!/ CC_1$.

又如图 3－2－15，在圆柱 O_1O 中，$AA_1/\!/OO_1$，$BB_1/\!/OO_1$，通过观察也可以看出 $AA_1/\!/BB_1$.





这表明，空间的三条直线也具有这样的性质，我们把它作为公理.

公理 4 平行于同一条直线的两条直线互相平行.

用符号可表示为：

$$\left.\begin{array}{l} a \parallel b \\ b \parallel c \end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel c.$$

经过直线外一点，有几条直线和这条直线平行？

如图 3－2－16，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 E，F 分别是 AB，BC 的中点，求证：$EF \parallel A_1C_1$.

连结 AC. 在$\triangle ABC$ 中，E，F 分别是 AB，BC 的中点，

$\therefore$ $EF \parallel AC$.

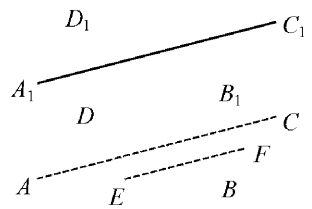
又$\because$ $AA_1 \mathrel{\underline{\parallel}} BB_1$，$BB_1 \mathrel{\underline{\parallel}} CC_1$，

$\therefore$ $AA_1 \mathrel{\underline{\parallel}} CC_1$，

$\therefore$ 四边形 AA_1C_1C 是平行四边形，

$\therefore$ $AC \parallel A_1C_1$.

从而 $EF \parallel A_1C_1$.



在平面中，如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同，那么这两个角相等. 这一结论在空间成立吗？

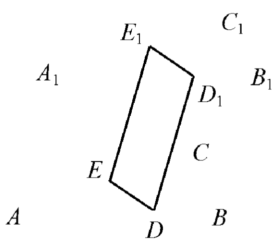
观察图 3－2－16 中的 $\angle BEF$ 和 $\angle B_1A_1C_1$，这两个角的两边分别平行，且有

$\angle BEF = \angle B_1A_1C_1$（因为 $\angle BEF = \angle BAC = \angle B_1A_1C_1$）.

一般地，我们有：

定理 如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同，那么这两个角相等.

已知：$\angle BAC$ 和 $\angle B_1A_1C_1$ 的边 $AB \parallel A_1B_1$，$AC \parallel A_1C_1$，并且方向相同（图 3－2－17）.



求证：$\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$.

为证明 $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$，我们构造两个全等三角形，使 $\angle BAC$ 与 $\angle B_1A_1C_1$ 是它们的对应角.

分别在$\angle BAC$ 和$\angle B_1A_1C_1$ 的两边上截取

$$AD = A_1D_1,\ AE = A_1E_1,$$

连结 AA_1，DD_1，EE_1，DE，D_1E_1.

$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel A_1B_1 \\ AD = A_1D_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{四边形 } AA_1D_1D \text{ 是平行四边形}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow AA_1 \underline{\mathbin{/\!/}} DD_1 \\ \text{同理 } AA_1 \underline{\mathbin{/\!/}} EE_1\end{array}\right\} \Rightarrow DD_1 \underline{\mathbin{/\!/}} EE_1 \Rightarrow \text{四边形 } DD_1E_1E \text{ 是平行四边形}$$

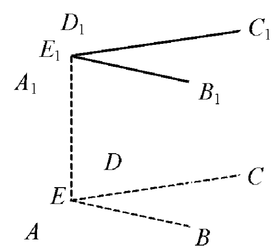
$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow DE = D_1E_1 \\ \quad AD = A_1D_1 \\ \quad AE = A_1E_1\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ADE \cong \triangle A_1D_1E_1 \Rightarrow \angle BAC = \angle B_1A_1C_1.$$

如果 $\angle BAC$ 和 $\angle B_1A_1C_1$ 的边 $AB \parallel A_1B_1$，$AC \parallel A_1C_1$，且 AB，A_1B_1 方向相同，而边 AC，A_1C_1 方向相反，那么 $\angle BAC$ 和 $\angle B_1A_1C_1$ 之间有何关系？为什么？

如图 3－2－18，已知 E，E_1 分别为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 AD，A_1D_1 的中点，求证：$\angle C_1E_1B_1 = \angle CEB$.

设法证明 $E_1C_1 \parallel EC$，$E_1B_1 \parallel EB$.

连结 EE_1.



$\because$ E_1，E 分别是 A_1D_1，AD 的中点，

$\therefore$ $A_1E_1 \underline{\mathbin{/\!/}} AE$，

故四边形 A_1E_1EA 是平行四边形，

$\therefore$ $A_1A \underline{\mathbin{/\!/}} E_1E$.

又$\because$ $A_1A \underline{\mathbin{/\!/}} B_1B$，

$\therefore$ $E_1E \underline{\mathbin{/\!/}} B_1B$，

故四边形 EE_1B_1B 是平行四边形.

$\therefore$ $E_1B_1 \parallel EB$，同理 $E_1C_1 \parallel EC$.

又$\because$ $\angle C_1E_1B_1$ 与 $\angle CEB$ 两边的方向相同，

$\therefore$ $\angle C_1E_1B_1 = \angle CEB$.

1. 设 AA_1 是正方体的一条棱，这个正方体中与 AA_1 平行的棱共有（　　）.

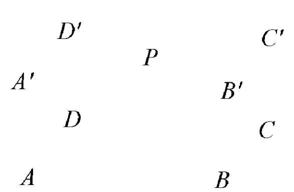
A. 1 条　　B. 2 条　　C. 3 条　　D. 4 条

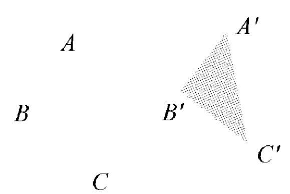
2. 如果 $OA \parallel O_1A_1$，$OB \parallel O_1B_1$，那么$\angle AOB$ 与$\angle A_1O_1B_1$（　　）.

A. 相等　　B. 互补

C. 相等或互补　　D. 以上答案都不对

3. 如图，在长方体木块 $ABCD-A'B'C'D'$的面$A'C'$内有一点 P，经过点 P 作棱 AB 的平行线，应该怎样画？并说明理由.

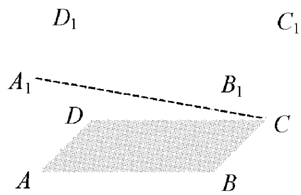


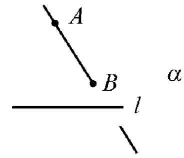


4. 如图，已知 AA'，BB'，CC' 不共面，且 $AA' \underline{\mathbin{/\!/}} BB'$，$BB' \underline{\mathbin{/\!/}} CC'$.

求证：$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

如图 3-2-19，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，直线 AB 与 A_1C 具有怎样的位置关系？





假设 AB 与 A_1C 共面，由于经过点 C 和直线 AB 的平面只能有一个，所以直线 A_1C 和 AB 都应在平面 $ABCD$ 内，于是 A_1 在平面 $ABCD$ 内，这与点 A_1 在平面 $ABCD$ 外矛盾. 因此，直线 AB 与 A_1C 是异面直线.

一般地，我们有：

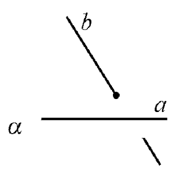
过平面内一点与平面外一点的直线，和这个平面内不经过该点的直线是异面直线.

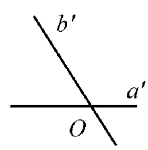
用符号可表示为(图 3-2-20)：

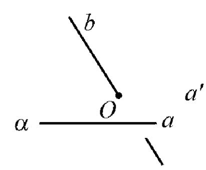
若 $l \subset \alpha$, $A \notin \alpha$, $B \in \alpha$, $B \notin l$，则直线 AB 与 l 是异面直线.

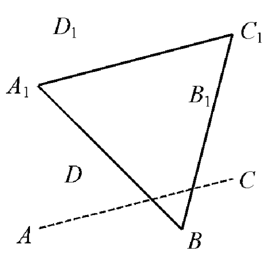
如图 3-2-21，a, b 是两条异面直线，经过空间任意一点 O，作直线 $a' /\!/ a$, $b' /\!/ b$，我们把直线 a' 和 b' 所成的锐角(或直角)叫做

a, b









已知 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是棱长为 a 的正方体(图 3-2-22).

(1) 正方体的哪些棱所在的直线与直线 BC_1 是异面直线？

(2) 求异面直线 AA_1 与 BC 所成的角；

(3) 求异面直线 BC_1 和 AC 所成的角.

(1) 正方体共有 12 条棱，与 BC_1 相交的棱有 6 条，与 BC_1 平行的棱不存在. 因此余下的 6 条棱所在的直线分别与直线 BC_1 是异面直线，它们是 A_1A, A_1B_1, A_1D_1, DA, DC, DD_1.

(2) $\because$ $AD /\!/ BC$,

∴ $\angle A_1AD$ 即为 AA_1 与 BC 所成的角.

∵ $\angle A_1AD = 90°$,

∴ AA_1 与 BC 所成的角为 $90°$.

(3) ∵ $AA_1 \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} BB_1 \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} CC_1$,

∴ 四边形 AA_1C_1C 是平行四边形,

∴ $AC \mathbin{/\!/} A_1C_1$,

∴ BC_1 与 AC 所成的角就是 BC_1 与 A_1C_1 所成的锐角或直角.

连结 A_1B.

∵ A_1B, BC_1 与 A_1C_1 都是正方体的面对角线,

∴ $A_1B = BC_1 = A_1C_1$,

∴ 三角形 A_1BC_1 是正三角形.

∴ BC_1 与 A_1C_1 所成的锐角为 $60°$,即 BC_1 和 AC 所成的角为 $60°$.

若两条异面直线 a, b 所成的角是直角,则称这两条异面直线 ,用符号表示为 $a \perp b$.

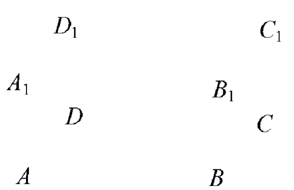
如图 3－2－22 中,AA_1 与 BC 所成的角为 $90°$,就记作 $AA_1 \perp BC$.

图 3－2－13 中,蜗杆和蜗轮的轴线是互相垂直的异面直线,它表明由蜗杆到蜗轮的传动方向变了 $90°$的角.

1. 指出下列命题是否正确,并说明理由：

(1) 过直线外一点可作无数条直线与已知直线成异面直线；

(2) 过直线外一点只有一条直线与已知直线垂直.



2. 如图,在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,哪些棱所在直线与直线 AA_1 是异面直线且互相垂直?

3. 如果两条直线 a 和 b 没有公共点,那么 a 与 b 的位置关系是(　　).

A. 共面　　B. 平行　　C. 异面　　D. 平行或异面

4. 直线 a, b 分别是长方体的相邻两个面的对角线所在的直线,则 a 与 b 的位置关系是(　　).

A. 平行　　B. 相交　　C. 异面　　D. 相交或异面

5. 在两个相交平面内各画一条直线,使它们成为：

(1) 平行直线；　(2) 相交直线；　(3) 异面直线.

6. 指出下列命题是否正确,并说明理由：

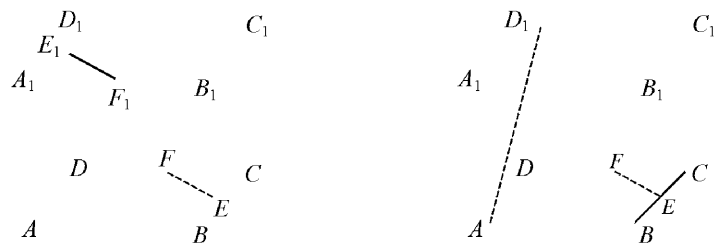
(1) 若 $a \mathbin{/\!/} b$, $c \perp a$,则 $c \perp b$;

(2) 若 $a \perp c$, $b \perp c$,则 $a \mathbin{/\!/} b$.

1. 如果三条直线两两相交,那么这三条直线是否共面?

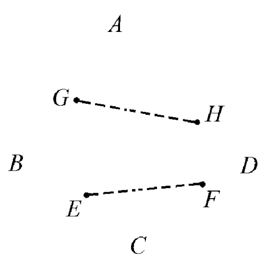
2. 四条线段顺次首尾连接,所得的图形一定是平面图形吗? 为什么?

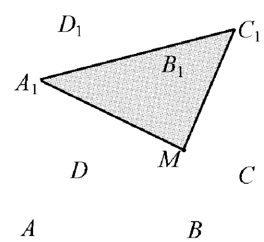
3. 画一个“三个平面两两相交”的直观图.
4. 空间不共面的四点能确定几个平面?
5. 如果 a, b 是异面直线,直线 c 与 a, b 都相交,那么由这三条直线中的任意两条所确定的平面共有多少个?
6. AB, CD 是两条异面直线,那么,直线 AC, BD 一定是异面直线吗? 为什么?
7. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,经过 A_1D 与 BB_1 能否作长方体的截面?为什么?
8. 如图,在正方体中,$A_1E_1 = CE$, $A_1F_1 = CF$. 求证: $E_1F_1 \mathrel{\underline{\parallel}} EF$.



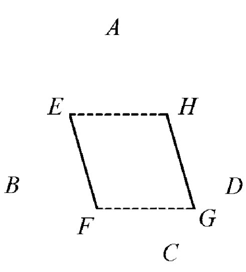
9. 如图,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AA_1=a$,E, F 分别是 BC, DC 的中点. 求异面直线 AD_1 与 EF 所成角的大小.

10. 如图,三棱锥 $A-BCD$ 中,E, G 分别是 BC, AB 的中点,F 在 CD 上,H 在 AD 上,且有 $DF : FC = DH : HA = 2 : 3$. 求证: EF, GH, BD 交于一点.





11. 如图,设 M 是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 棱 BB_1 的中点,试作出平面 A_1C_1M 与平面 $ABCD$ 的交线.
12. 分别与两条异面直线 a,b 都相交的两条直线 c、d 一定异面吗? 为什么?
13. 如图,在三棱锥 $A-BCD$ 中,E, F, G, H 分别是边 AB, BC, CD, DA 的中点.



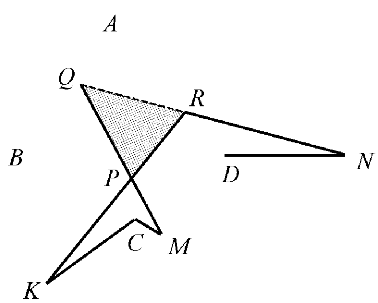
(1) 求证:四边形 $EFGH$ 是平行四边形;

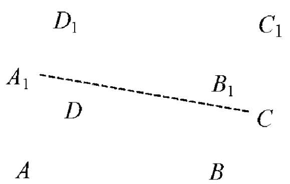
(2) 若 $AC=BD$,求证:四边形 $EFGH$ 为菱形;

(3) 当 AC 与 BD 满足什么条件时,四边形 $EFGH$ 是正方形?

14. 如图,设点 A 为投影中心,$\triangle PQR$ 在平面 α 上的投影为 $\triangle CBD$,若直线 QP 和 BC 的延长线交于点 M,直线 QR 和 BD 的延长线交于点 N,直线 RP 和 DC 的延长线交于点 K,那么 M, N, K 三点具有怎样的位置关系? 为

什么?





直线和平面可能有哪几种位置关系?你能根据公共点的情况进行分类吗?

观察图 3 - 2 - 23 所示的长方体,可以发现,棱 A_1B_1(或 A_1D_1)所在的直线与平面 AC 没有公共点,对角线 A_1C(或棱 AA_1)所在的直线与平面 AC 有且只有一个公共点,棱 AD 所在直线与平面 AC 有无数个公共点.

如果一条直线 a 和一个平面 α 没有公共点,我们就说直线 a 与平面 α 平行;如果直线 a 与平面 α 有且只有一个公共点,我们就说直线 a 与平面 α 相交;如果直线 a 与平面 α 有无数个公共点,我们就说直线 a 在平面 α 内.

一条直线和一个平面的位置关系有且只有以下三种:

位置关系	直线 a 在平面 α 内	直线 a 与平面 α 相交	直线 a 与平面 α 平行
公共点	有无数个公共点	有且只有一个公共点	没有公共点
符号表示	$a \subset \alpha$	$a \cap \alpha = A$	$a \parallel \alpha$
图形表示	α a	a A α	a α

我们把直线与平面相交或平行的情况统称为　　　　　　,用符号表示为 $a \not\subset \alpha$.

在如图 3 - 2 - 23 所示的长方体中,$A_1B_1 \parallel AB$,当直线 AB 沿直线 BC 平移时,它就形成了平面 AC,直线 AB 在平移过程中的每一个

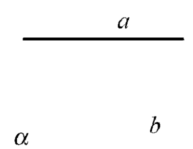
位置都与 A_1B_1 平行，因此直线 A_1B_1 与平面 AC 没有公共点.

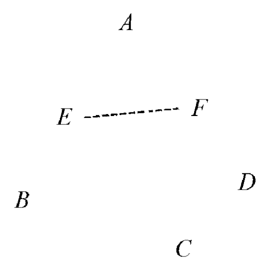
一般地，我们有：

直线与平面平行的判定定理 如果平面外一条直线和这个平面内的一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行.

用符号表示为(图 3－2－24)：

$$\left.\begin{array}{l} a \not\subset \alpha \\ b \subset \alpha \\ a \parallel b \end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel \alpha.$$





如图 3－2－25，已知 E，F 分别是三棱锥 $A-BCD$ 的侧棱 AB，AD 的中点，求证：$EF\parallel$平面 BCD.

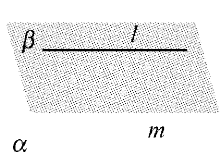
设法在平面 BCD 内找一条直线与 EF 平行.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} AE = EB \\ AF = FD \end{array}\right\} \Rightarrow EF \parallel BD \\ \qquad\qquad\quad EF \not\subset \text{平面 } BCD \\ \qquad\qquad\quad BD \subset \text{平面 } BCD \end{array}\right\} \Rightarrow EF \parallel \text{平面 } BCD.$$

如果直线与平面平行，那么这条直线是否与这个平面内的任意一条直线都平行？

由直线与平面平行可知，这条直线与这个平面内的任意一条直线都没有公共点，所以它们只能平行或异面. 于是，我们有：

直线与平面平行的性质定理 如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线就和交线平行.

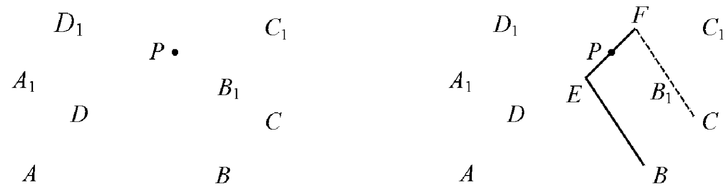


已知：$l\parallel\alpha$，$l\subset\beta$，$\alpha\cap\beta=m$(图 3－2－26).

求证：$l\parallel m$.

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} l \parallel \alpha \Rightarrow l \text{ 和 } \alpha \text{ 没有公共点} \\ m \subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow l \text{ 和 } m \text{ 没有公共点} \\ l,\ m \subset \beta \end{array}\right\} \Rightarrow l \parallel m.$$

一个长方体木块如图 3 - 2 - 27(1)所示,要经过平面 A_1C_1 内一点 P 和棱 BC 将木块锯开,应该怎样画线?



(1)　　　　(2)

点 P 与 BC 确定平面 α,根据题意,应画出平面 α 与长方体各面的交线.

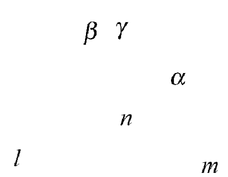
因为点 P 既在平面 α 内又在平面 A_1C_1 内,由公理 2,平面 α 与平面 A_1C_1 必相交于经过点 P 的一条直线. 设这条直线与 A_1B_1, C_1D_1 的交点分别为 E, F.

由于 $BC /\!/ B_1C_1$,故 $BC /\!/$ 平面 A_1C_1,由直线与平面平行的性质定理得 $BC /\!/ EF$. 因此只要在平面 A_1C_1 内过点 P 作 B_1C_1 的平行线即可.

过点 P 在平面 A_1C_1 内作 $EF /\!/ B_1C_1$,
分别交 A_1B_1, C_1D_1 于 E, F.

连结 BE, CF,
则 BE, CF 和 EF 就是所要画的线(图 3 - 2 - 27(2)).

求证:如果三个平面两两相交于三条直线,并且其中两条直线平行,那么第三条直线也和它们平行.



已知:平面 α, β, γ, $\alpha \cap \beta = l$, $\alpha \cap \gamma = m$, $\beta \cap \gamma = n$,且 $l /\!/ m$ (图 3 - 2 - 28).

求证:$n /\!/ l$, $n /\!/ m$.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} l /\!/ m \\ l \not\subset \gamma \\ m \subset \gamma \end{array}\right\} \Rightarrow l /\!/ \gamma \\ \qquad\qquad l \subset \beta \\ \qquad\qquad \beta \cap \gamma = n \end{array}\right\} \Rightarrow n /\!/ l.$$

同理,$n /\!/ m$.

如果三个平面两两相交于三条直线,并且其中两条直线相交,那么第三条直线和这两条直线有怎样的位置关系呢?

1. 指出下列命题是否正确,并说明理由:

(1) 如果一条直线不在平面内,那么这条直线就与这个平面平行;

(2) 过直线外一点有无数个平面与这条直线平行;

(3) 过平面外一点有无数条直线与这个平面平行.

2. 已知直线 a, b 和平面 α,下列命题中正确的是(　　).

A. 若 $a /\!/ \alpha$, $b \subset \alpha$,则 $a /\!/ b$

B. 若 $a /\!/ \alpha$, $b /\!/ \alpha$,则 $a /\!/ b$

C. 若 $a /\!/ b$, $b \subset \alpha$,则 $a /\!/ \alpha$

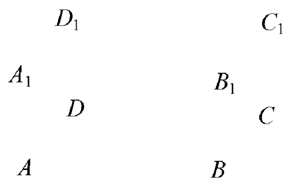
D. 若 $a /\!/ b$, $a /\!/ \alpha$,则 $b /\!/ \alpha$ 或 $b \subset \alpha$

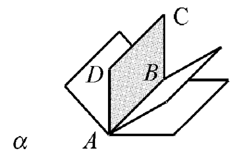
3. 如图,在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的面中:

(1) 与直线 AB 平行的平面是____________________;

(2) 与直线 AA_1 平行的平面是____________________;

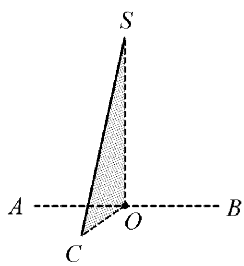
(3) 与直线 AD 平行的平面是____________________.

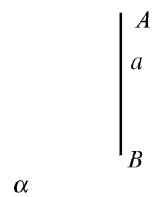




4. 如图,一块矩形木板 $ABCD$ 的一边 AB 在平面 α 内,把这块矩形木板绕 AB 转动,AB 的对边 CD 是否都和平面 α 平行?为什么?

观察圆锥 SO(图 3-2-29),它给我们以轴 SO 垂直于底面的形象.轴 SO 与底面内的哪些直线垂直呢?





由于圆锥 SO 是由直角三角形 SOC 绕直角边 SO 旋转一周形成的,因此 SO 与底面内的每一条半径都垂直,从而 SO 垂直于底面内的所有直线.

如图 3-2-30,如果一条直线 a 与一个平面 α 内的任意一条直线都垂直,我们就说　　a　　　　　　α,记作 $a \perp \alpha$. 直线 a 叫做　　α　　　　,平面 α 叫做　　a　　　　,垂线和平面的交点称为　　　.

事实上,我们前面所说的正投影就是投射线垂直于投影面的投影.

在平面中,过一点有且只有一条直线与已知直线垂直.那么,在空间:

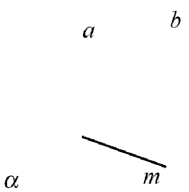
(1) 过一点有几条直线与已知平面垂直?

(2) 过一点有几个平面与已知直线垂直?

事实上,

过一点有且只有一条直线与已知平面垂直,过一点有且只有一个平面与已知直线垂直.

过平面 α 外一点 A 向平面 α 引垂线,则点 A 和垂足 B 之间的距离叫做 A α



求证:如果两条平行直线中的一条垂直于一个平面,那么另一条也垂直于这个平面.

已知:$a /\!/ b$, $a \perp \alpha$(图 3-2-31).

求证:$b \perp \alpha$.

只要证明 b 与平面 α 内任意一条直线都垂直.

设 m 是 α 内的任意一条直线.

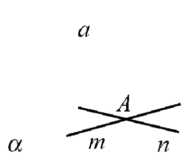
$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}a \perp \alpha \\ m \subset \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow a \perp m \\ a /\!/ b\end{array}\right\} \Rightarrow b \perp m, \text{故 } b \perp \alpha.$$

如图 3-2-32(1),将一张矩形纸片对折后略为展开,竖立在桌面上,我们可以观察到折痕与桌面垂直.如图 3-2-32(2),从两个不同的方向观察,旗杆都与水平线垂直,就可以判断旗杆与地面垂直.

(1) (2)

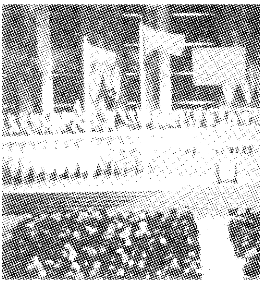
一般地,我们有如下判定定理:

直线与平面垂直的判定定理 如果一条直线和一个平面内的两条相交直线垂直,那么这条直线垂直于这个平面.



用符号表示为(图 3-2-33):

若 $a \perp m$, $a \perp n$, $m \cap n = A$, $m \subset \alpha$, $n \subset \alpha$,则 $a \perp \alpha$.



两根旗杆垂直于地面，给我们以旗杆平行的形象.

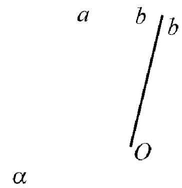
一般地，我们有：

直线与平面垂直的性质定理 如果两条直线同时垂直于一个平面，那么这两条直线平行.

已知：$a\perp\alpha$，$b\perp\alpha$. 求证：$a/\!/b$.

直接证明 $a/\!/b$ 比较困难，我们采用反证法来证明.

如图 3－2－34，假设 b 不平行于 a，设 $b\cap\alpha=O$，b' 是经过点 O 与直线 a 平行的直线.



$\because$ $a/\!/b'$，$a\perp\alpha$，

$\therefore$ $b'\perp\alpha$.

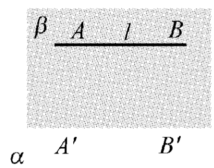
即经过同一点 O 的两条直线 b，b' 都垂直于平面 α，这是不可能的.

因此 $a/\!/b$.

已知：直线 $l/\!/$平面 α.

求证：直线 l 上各点到平面 α 的距离相等.

过直线 l 上任意两点 A，B 分别作平面 α 的垂线 AA'，BB'，垂足分别为 A'，B'（图 3－2－35）.



$\because$ $AA'\perp\alpha$，$BB'\perp\alpha$，

$\therefore$ $AA'/\!/BB'$.

设经过直线 AA' 和 BB' 的平面为 β，则 β 与 α 的交线为直线 $A'B'$.

$\because$ $l/\!/\alpha$，

$\therefore$ $l/\!/A'B'$，

$\therefore$ $A'B'BA$ 是平行四边形，

$\therefore$ $AA'=BB'$.

即直线 l 上各点到平面 α 的距离相等.

如果一条直线和一个平面平行，这条直线上任意一点到这个平面的距离，叫做

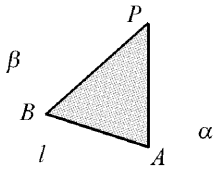
1. 已知直线 l，m，n 与平面 α，指出下列命题是否正确，并说明理由：

（1）若 $l\perp\alpha$，则 l 与 α 相交；

（2）若 $m\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，$l\perp m$，$l\perp n$，则 $l\perp\alpha$；

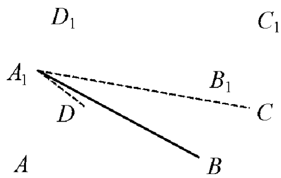
（3）若 $l/\!/m$，$m\perp\alpha$，$n\perp\alpha$，则 $l/\!/n$.

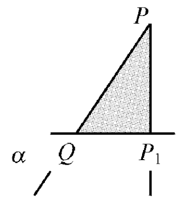
2. 某空间图形的三视图如图所示，试画出它的直观图，并指出其中的线面垂直关系.



3. 如图，已知 $PA\perp\alpha$，$PB\perp\beta$，垂足分别为 A，B，且 $\alpha\cap\beta=l$. 求证：$l\perp$ 平面 APB.
4. 已知直线 a∥平面 α，直线 $b\perp$ 平面 α. 求证：$a\perp b$.

观察图 3－2－36 所示的长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，可以发现 A_1B，A_1C，A_1D 虽然都和平面 $ABCD$ 相交，但都不与这个平面垂直.





一条直线与一个平面相交，但不和这个平面垂直，这条直线叫做这个平面的　　(oblique line)，斜线与平面的交点叫做　　. 斜线上一点与斜足间的线段叫做这个点到平面的　　　.

如图 3－2－37，过平面外一点 P 向平面 α 引斜线和垂线，那么过斜足 Q 和垂足 P_1 的直线就是斜线在平面内的正投影(简称射影)，线段 P_1Q 就是斜线段 PQ 在平面 α 内的射影.

平面的一条斜线与它在这个平面内的射影所成的锐角，叫做

.

在图 3－2－37 中，$\angle PQP_1$ 就是 PQ 与 α 所成的角.

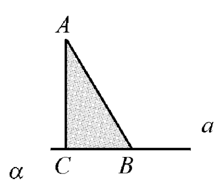
一条直线垂直于平面，我们说它们所成的角是直角；一条直线与平面平行或在平面内，我们说它们所成的角是 0°的角.

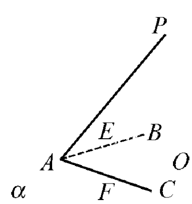
如图 3－2－38，已知 AC，AB 分别是平面 α 的垂线和斜线，C，B分别是垂足和斜足，$a\subset\alpha$，$a\perp BC$.

求证：$a\perp AB$.

因为 $AB\subset$ 平面 ABC，所以只要证明 $a\perp$ 平面 ABC.

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}AC\perp\alpha\\ a\subset\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp AC\\ a\perp BC\\ AC\cap BC=C\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp \text{平面 } ABC\\ AB\subset\text{平面 } ABC\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp AB.$$





如图 3－2－39，已知$\angle BAC$在平面α内，$P\notin\alpha$，$\angle PAB=\angle PAC$. 求证：点P在平面α上的射影在$\angle BAC$的平分线上.

作$PO\perp\alpha$，$PE\perp AB$，$PF\perp AC$，垂足分别为O，E，F，连结OE，OF，OA.

$$\left.\begin{array}{l}PE\perp AB,\ PF\perp AC\\ \angle PAE=\angle PAF\\ PA=PA\end{array}\right\}\Rightarrow \mathrm{Rt}\triangle PAE\cong\mathrm{Rt}\triangle PAF\Rightarrow AE=AF.$$

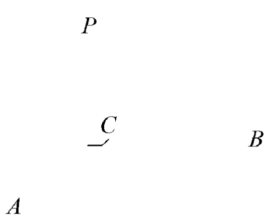
$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}PO\perp\alpha\\ AB\subset\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow AB\perp PO\\ \qquad\qquad\quad AB\perp PE\end{array}\right\}\Rightarrow AB\perp\text{平面 }PEO\Rightarrow AB\perp OE.$$

同理，$AC\perp OF$.

在$\mathrm{Rt}\triangle AOE$和$\mathrm{Rt}\triangle AOF$中，$AE=AF$，$OA=OA$，所以$\mathrm{Rt}\triangle AOE\cong\mathrm{Rt}\triangle AOF$.

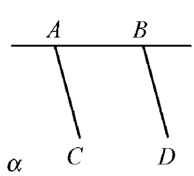
于是$\angle EAO=\angle FAO$，
即点P在α上的射影O在$\angle BAC$的平分线上.

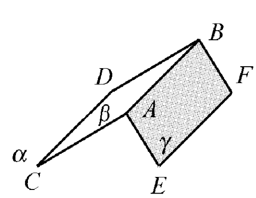
四面体的四个面中，最多有几个直角三角形？



1. 如图，$\angle BCA=90°$，$PC\perp$平面ABC，则在$\triangle ABC$，$\triangle PAC$的边所在的直线中：
   (1) 与PC垂直的直线有____________；
   (2) 与AP垂直的直线有____________.
2. 在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，直线AD_1与平面$ABCD$所成的角是________.
3. 若直线a与平面α不垂直，那么在平面α内与直线a垂直的直线（　　）.
   A. 只有一条　　B. 有无数条
   C. 是平面α内的所有直线　　D. 不存在
4. 从平面外一点向平面引斜线段，如果斜线段的长相等，那么它们在平面内的射影相等吗？
5. 在三棱锥$P-ABC$中，顶点P在平面ABC内的射影是$\triangle ABC$的外心，求证：$PA=PB=PC$.

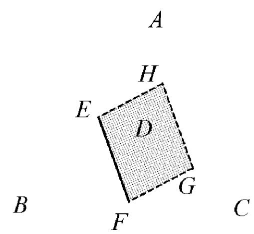
1. 如图，$AB\parallel\alpha$，$AC\parallel BD$，$C\in\alpha$，$D\in\alpha$. 求证：$AC=BD$.

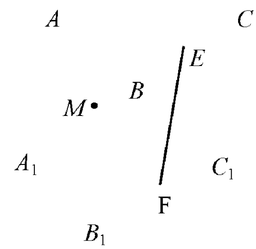




2. 如图，$\alpha \cap \beta = CD$，$\alpha \cap \gamma = EF$，$\beta \cap \gamma = AB$，$AB \parallel \alpha$.
求证：$CD \parallel EF$.

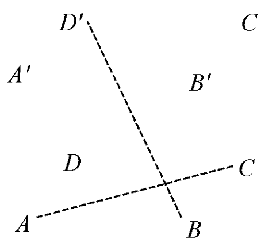
3. 如图，E，F，G，H 分别是空间四边形 $ABCD$ 的边 AB，BC，CD，DA 的中点，求证：
(1) 四点 E，F，G，H 共面；
(2) $BD \parallel$ 平面 $EFGH$，$AC \parallel$ 平面 $EFGH$.

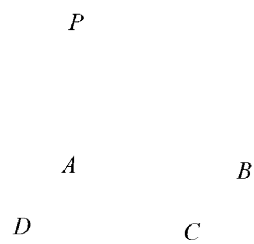




4. 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$E \in BC$，$F \in B_1C_1$，$EF \parallel C_1C$，点 $M \in$ 侧面 AA_1B_1B，点 M，E，F 确定平面 γ. 试作出平面 γ 与三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 表面的交线.

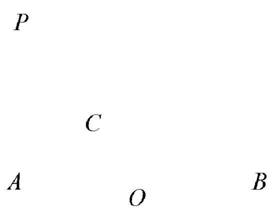
5. 如图，在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，判断 AC 与 BD' 的位置关系，并证明你的结论.

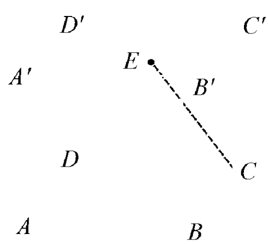




6. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$ABCD$ 是矩形，$PA \perp$ 平面 $ABCD$.
(1) 指出图中有哪些三角形是直角三角形，并说明理由；
(2) 若 $PA=AD=AB$，试求 PC 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值.

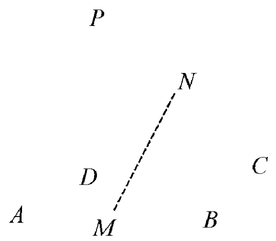
7. 如图，AB 是圆 O 的直径，PA 垂直于圆 O 所在的平面，C 是圆上不同于 A，B 的任一点. 求证：$BC \perp$ 平面 PAC.





8. 如图，一块正方体木料的上底面上有一点 E，要经过点 E 在上底面上画一条直线和 C，E 连线垂直，应怎样画？

9. 求证：若两条平行直线中的一条与一个平面相交，则另一条也与这个平面相交.



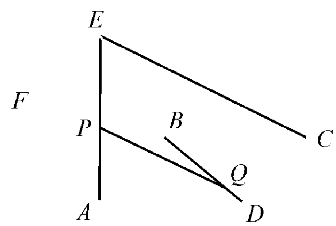
10. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，M，N 分别是 AB，PC 的中点，若 $ABCD$ 是平行四边形，求证：$MN/\!/$平面 PAD.

11. 证明：过一点和已知平面垂直的直线只有一条.

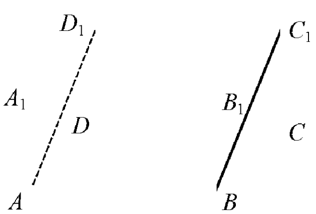
12. 求证：如果平面内的一条直线与这个平面的一条斜线垂直，那么这条直线就和这条斜线在这个平面内的射影垂直.

13. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，点 P 在平面 ABC 上的射影 O 是$\triangle ABC$ 的垂心（三角形三条边上的高交于一点，这点叫做这个三角形的垂心）. 求证：$PA\perp BC$.

14. 如图，已知有公共边 AB 的两个全等矩形 $ABCD$ 和 $ABEF$ 不在同一平面内，P，Q 分别是对角线 AE，BD 上的动点，当 P，Q 满足什么条件时，$PQ/\!/$平面 CBE?



两个平面可能有哪几种位置关系？你能根据公共点的情况进行分类吗？

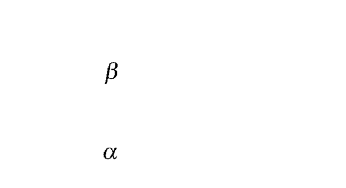
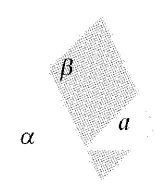


观察长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$（图 3－2－40），它的上、下底面无论怎样延展都没有公共点，而它的下底面与平面 ABC_1D_1 则有一条交线 AB.

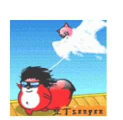
如果两个平面没有公共点，我们就说这　　　　　　　　.

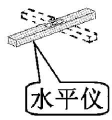
如果两个平面有一个公共点，由公理 2 可知，那么它们相交于经过这点的一条直线.

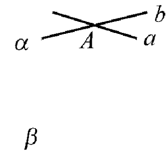
两个平面的位置关系有：

位置关系	两平面平行	两平面相交
公　共　点	没有公共点	有一条公共直线
符号表示	$\alpha/\!/\beta$	$\alpha\cap\beta=a$
图形表示	 β α	 β a α

怎样使用水平仪来检测桌面是否水平？







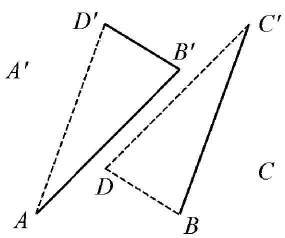
工人师傅将水平仪(图 3－2－41)在桌面上交叉放置两次，如果水平仪的气泡两次都在中央，就能判断桌面是水平的.

该检测原理就是：

两个平面平行的判定定理 如果一个平面内有两条相交直线都平行于另一个平面，那么这两个平面平行.

用符号表示为(图 3－2－42)：

若 $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $a \cap b = A$，且 $a \parallel \beta$, $b \parallel \beta$，则 $\alpha \parallel \beta$.



如图 3－2－43，在长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，求证：平面$C'DB \parallel$平面 $AB'D'$.

只要证明一个平面内有两条相交直线与另一个平面平行.

$AB \mathrel{\underline{\parallel}} DC \mathrel{\underline{\parallel}} D'C' \Rightarrow ABC'D'$ 是平行四边形

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow \quad BC' \parallel AD' \\ BC' \not\subset \text{平面 } AB'D' \\ AD' \subset \text{平面 } AB'D'\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} BC' \parallel \text{平面 } AB'D' \\ \text{同理}, C'D \parallel \text{平面 } AB'D' \\ BC' \cap C'D = C'\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ 平面 $C'DB \parallel$ 平面 $AB'D'$.

如果两个平面平行，那么：

(1) 一个平面内的直线是否平行于另一个平面?

(2) 分别在两个平行平面内的两条直线是否平行?

对于问题(1)，根据两个平面平行及直线和平面平行的定义可知，两个平面平行，其中一个平面内的直线必定平行于另一个平面.

对于问题(2)，分别在两个平行平面内的两条直线必定没有公共点，所以只能判定它们平行或异面.

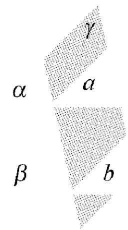
于是，我们有：

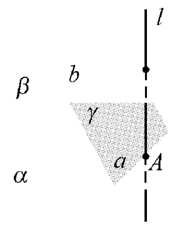
两个平面平行的性质定理 如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它们的交线平行.

已知：$\alpha/\!/\beta$，$\alpha\cap\gamma=a$，$\beta\cap\gamma=b$(图 3－2－44).

求证：$a/\!/b$.

因为 $\alpha/\!/\beta$,所以 α 与 β 没有公共点,因而交线 a，b 也没有公共点. 又因为 a，b 都在平面 γ 内,所以 $a/\!/b$.





求证：如果一条直线垂直于两个平行平面中的一个平面,那么它也垂直于另一个平面.

已知：$\alpha/\!/\beta$，$l\perp\alpha$(图 3－2－45).

求证：$l\perp\beta$.

要证 $l\perp\beta$,只要证明 l 垂直于 β 内的任意一条直线或某两条相交直线.

设 $l\cap\alpha=A$,在平面 β 内任取一条直线 b.

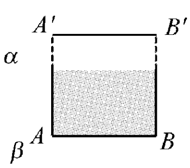
因为点 A 不在 β 内,所以点 A 与直线 b 可确定平面 γ.

设 $\gamma\cap\alpha=a$.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}\alpha/\!/\beta\\ \alpha\cap\gamma=a\\ \beta\cap\gamma=b\end{array}\right\}\Rightarrow a/\!/b\\ \left.\begin{array}{r}l\perp\alpha\\ a\subset\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow l\perp a\end{array}\right\}\Rightarrow l\perp b.$$

由于直线 b 是平面 β 内的任意一条直线,所以 $l\perp\beta$.

与两个平行平面都垂直的直线,叫做这两个平行平面的　　　　,它夹在这两个平行平面间的线段,叫做这两个平行平面的　　　　.



如图 3－2－46,$\alpha/\!/\beta$,如果 AA'，BB' 都是它们的公垂线段,那么 $AA'/\!/BB'$. 根据两个平面平行的性质定理,有 $A'B'/\!/AB$,所以四边形 $ABB'A'$ 是平行四边形,故 $AA'=BB'$.

由此我们得到,两个平行平面的公垂线段都相等. 我们把公垂线段的长度叫做　　　　　　　　.

1. 判断下列命题是否正确,并说明理由：

(1) 若平面 α 内的两条直线分别与平面 β 平行,则 α 与 β 平行;

(2) 若平面 α 内有无数条直线与平面 β 平行,则 α 与 β 平行;

（3）棱柱的侧面都是平行四边形；

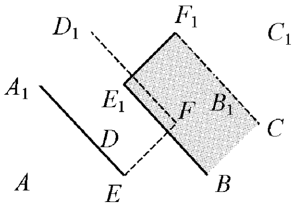
（4）棱台的侧面都是梯形；

（5）平行于同一条直线的两个平面平行；

（6）两个平面分别经过两条平行直线，这两个平面平行；

（7）过已知平面外一点，有且仅有一个平面与已知平面平行；

（8）过已知平面外一条直线，必能作出与已知平面平行的平面.

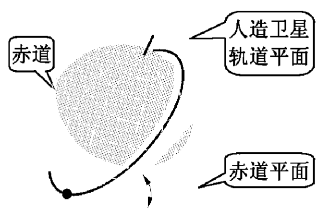


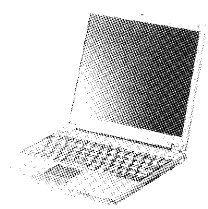
2. 六棱柱的表面中，互相平行的面最多有多少对？

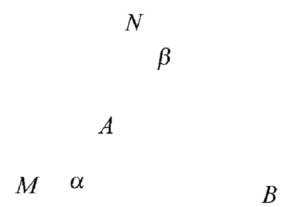
3. 如图，设 E，F，E_1，F_1 分别是长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 AB，CD，A_1B_1，C_1D_1 的中点. 求证：平面 ED_1 // 平面 BF_1.

4. 求证：夹在两个平行平面间的平行线段相等.

发射人造地球卫星时，要使卫星的轨道平面与地球的赤道平面成一定的角度（图 3－2－47）. 使用手提电脑时，为便于操作，需将显示屏打开一定的角度（图 3－2－48）. 如何刻画两个平面形成的这种"角"呢？







平面内的一条直线把这个平面分成两部分，其中的每一部分都叫做　　（semi-plane），当其中一个半平面绕着这条直线旋转时，两个半平面就形成了一定的"角度".

一般地，一条直线和由这条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做　　（dihedral angle），这条直线叫做二面角的　（edge），每个半平面叫做二面角的　（face）.

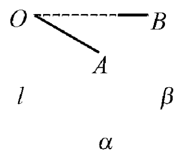
棱为 AB，面为 α，β 的二面角，记作二面角 $\alpha-AB-\beta$.

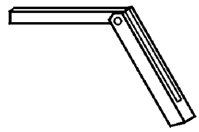
笔记本电脑打开时，我们感到两个面板构成的二面角在逐渐变大. 如何来刻画这个二面角的大小呢？

我们看到，随着张口的增大，$\angle MAN$ 在逐渐增大（图 3－2－48），当二面角确定时，$\angle MAN$ 也随之确定，故可用 $\angle MAN$ 度量二面角.

一般地，以二面角的棱上任意一点为端点，在两个面内分别作垂直于棱的两条射线，这两条射线所成的角叫做二面角的　　（plane angle）.

图 3－2－49 中，$OA\perp l$，$OB\perp l$，故 $\angle AOB$ 就是二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角.



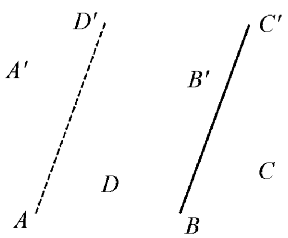


二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角 $\angle AOB$ 的大小与点 O 的位置有关吗(图 3－2－49)?

二面角的大小可以用它的平面角来度量，二面角的平面角是多少度，就说这个二面角是多少度. 我们约定，二面角 α 的大小范围是 $0°\leqslant\alpha\leqslant180°$. 平面角是直角的二面角叫做 (right dihedral angle).

木工用活动角尺测量工件的两个面所成的角时，实际上就是测量这两个面所成二面角的平面角(图 3－2－50).

1970 年 4 月 24 日，我国用自制“长征 1 号”运载火箭，在酒泉卫星发射中心成功地发射了第一颗人造地球卫星——“东方红 1 号”，这标志着我国在征服太空的道路上迈出了巨大的一步，跻身于世界航天先进国家之列. “东方红 1 号”轨道平面的倾斜角是 68.5°，就是说卫星轨道平面与地球赤道平面所成的二面角是 68.5°.



如图 3－2－51，在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中：

(1) 求二面角 $D'-AB-D$ 的大小；

(2) 求二面角 $A'-AB-D$ 的大小.

(1) 在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，$AB\perp$ 平面 AD'，

∴ $AB\perp AD'$，$AB\perp AD$，

∴ $\angle D'AD$ 即为二面角 $D'-AB-D$ 的平面角.

在 $\mathrm{Rt}\triangle D'AD$ 中，$\angle D'AD=45°$，

∴ 二面角 $D'-AB-D$ 的大小为 45°.

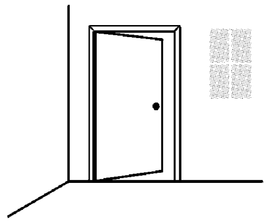
(2) 同理，$\angle A'AD$ 为二面角 $A'-AB-D$ 的平面角，二面角 $A'-AB-D$ 的大小为 90°.

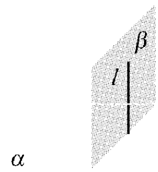
一般地，如果两个平面所成的二面角是直二面角，我们就说这

.

为什么教室的门转到任何位置时，门所在平面都与地面垂直(图 3－2－52)? 通过观察可以发现，门在转动的过程中，门轴始终与地面垂直. 于是，我们有：

平面与平面垂直的判定定理　如果一个平面经过另一个平面的一条垂线，那么这两个平面互相垂直.

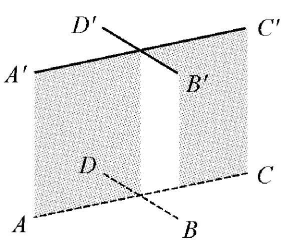




用符号表示为(图 3－2－52)：

$$\left.\begin{array}{l} l\perp\alpha \\ l\subset\beta \end{array}\right\}\Rightarrow\alpha\perp\beta.$$

建筑工人在砌墙时，常用一端系有铅锤的线来检查所砌的墙是否和水平面垂直(图 3－2－53)，就是依据这个面面垂直的判定定理.



在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中(图 3－2－54)，求证：平面 $A'C'CA\perp$ 平面 $B'D'DB$.

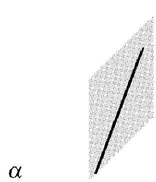
$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} AA'\perp \text{平面 } ABCD \\ BD\subset \text{平面 } ABCD \end{array}\right\}\Rightarrow AA'\perp BD \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad AC\perp BD \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} BD\perp \text{平面 } A'C'CA \\ BD\subset \text{平面 } B'D'DB \end{array}\right\}$$

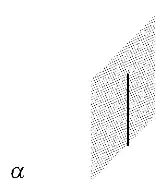
$\Rightarrow$平面 $A'C'CA\perp$平面 $B'D'DB$.

如果两个平面垂直，那么一个平面内的直线是否一定垂直于另一个平面?

答案是否定的(图 3－2－55). 事实上，我们有：

平面与平面垂直的性质定理　如果两个平面互相垂直，那么在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面.





已知：$\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=l$，$AB\subset\alpha$，$AB\perp l$，B 为垂足（图 3－2－56）.

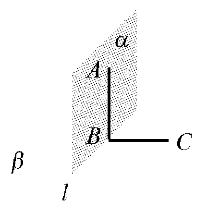
求证：$AB\perp\beta$.

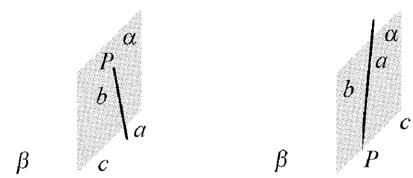
因为 $AB\perp l$，所以要证 $AB\perp\beta$，只需在 β 内找一条与 l 相交的直线垂直于 AB.

在平面 β 内作 $BC\perp l$，
则 $\angle ABC$ 是二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角.

由 $\alpha\perp\beta$，可知 $AB\perp BC$.

又 $AB\perp l$，所以 $AB\perp\beta$.





求证：如果两个平面互相垂直，那么经过第一个平面内的一点垂直于第二个平面的直线必在第一个平面内.

已知：$\alpha\perp\beta$，$P\in\alpha$，$P\in a$，$a\perp\beta$（图 3－2－57）.

求证：$a\subset\alpha$.

设 $\alpha\cap\beta=c$.

过点 P 在平面 α 内作直线 $b\perp c$，
根据平面与平面垂直的性质定理，有 $b\perp\beta$.

因为经过一点有且只有一条直线与平面 β 垂直，
所以直线 a 应与直线 b 重合，即 $a\subset\alpha$.

平面几何与立体几何的类比

类比是根据两个对象在某些方面的相同或相似，推出它们在其他方面的相同或相似点的一种推理方法.

由于类比推理所得结论的真实性并不可靠，因此它不能作为严格的数学推理方法，但它是提出新问题和获得新发现取之不竭的源泉.

平面几何和立体几何在研究对象和方法、构成图形的基本元素等方面是相同或相似的，因此，在两者之间进行类比是研究它们性质的一种非常有效的方法.

为了对二者进行类比，可以在它们的基本元素之间建立如下的类比关系：

平面 空间

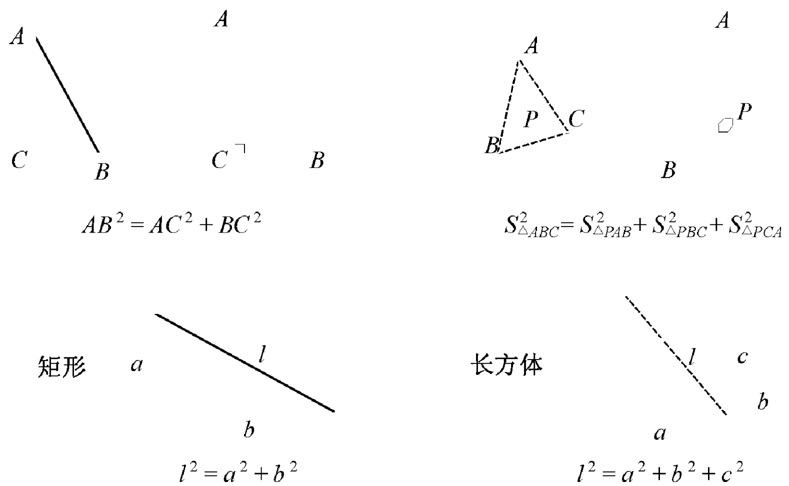
点 $\longrightarrow$ 点或直线

直线 $\longrightarrow$ 直线或平面

平面图形 $\longrightarrow$ 平面图形或立体图形

(1) 由平面几何定理类比到立体几何命题，再尝试判断该命题是否成立.

例如，对勾股定理进行类比(图 3-2-58).

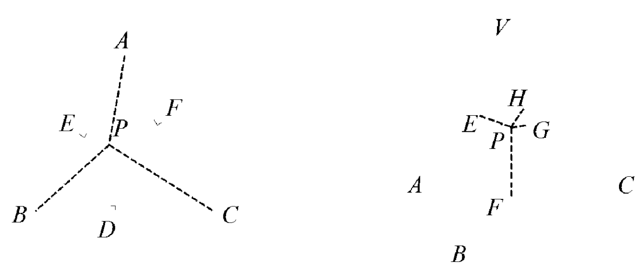


(2) 由立体几何问题，用类比的方法构造辅助的平面几何问题，通过这个问题的解决，类比猜想立体几何问题的解决方法.

例如，求证：正四面体内任一点到四个面的距离之和为定值.

类比构造一个辅助平面几何问题“求证：正三角形内任意一点到三边的距离之和为定值”.

通过分割的方法，利用面积的关系解决平面几何问题(图 3-2-59).



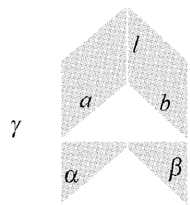
类比猜想，所给立体几何问题是否也可以通过分割的方法，利用体积的关系来证明？

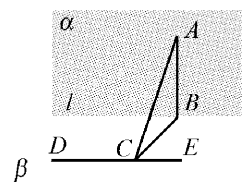
这个猜想是正确的(证明略).

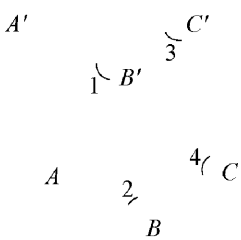
勤于运用类比推理去探索和研究问题，有利于创造性思维能力的培养.

试说出一个类似于下面的平面几何定理的立体几何命题：平面内不共线的三点确定一个圆.

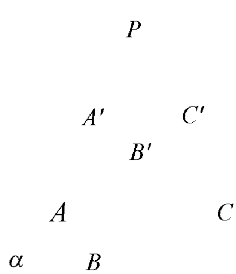
1. 房间里相邻的两面墙及地面可以构成几个二面角？分别指出这些二面角的面、棱、平面角.
2. 判断下列命题是否正确，并说明理由：
   (1) 若 $\alpha\perp\gamma$, $\beta\perp\gamma$，则 $\alpha/\!/\beta$；
   (2) 若 $\alpha\perp\beta$, $\beta\perp\gamma$，则 $\alpha\perp\gamma$；
   (3) 若 $\alpha/\!/\alpha_1$, $\beta/\!/\beta_1$, $\alpha\perp\beta$，则 $\alpha_1\perp\beta_1$.
3. 如图，α, β, γ 为平面，$\alpha\cap\beta=l$, $\alpha\cap\gamma=a$, $\beta\cap\gamma=b$, $l\perp\gamma$，指出图中哪个角是二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角，并说明理由.
4. 如图，$\alpha\perp\beta$, $\alpha\cap\beta=l$, $AB\subset\alpha$, $AB\perp l$, $BC\subset\beta$, $DE\subset\beta$, $BC\perp DE$. 求证：$AC\perp DE$.

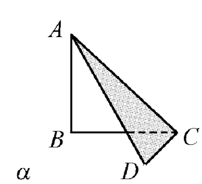






1. 如图，在多面体 $ABC-A'B'C'$ 中，如果在平面 AB' 内，$\angle 1+\angle 2=180^\circ$，在平面$BC'$ 内，$\angle 3+\angle 4=180^\circ$，那么平面 ABC 和平面 $A'B'C'$ 有什么关系？为什么？
2. 已知三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$，求证：$\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$.
3. 已知平面 $\alpha/\!/\beta$, $l\not\subset\beta$，且 $l/\!/\alpha$，求证：$l/\!/\beta$.
4. (1) 平面外的一条直线上有两点到这个平面距离相等，试判断直线与该平面的位置关系；
   (2) 平面上三点到另一平面距离相等，试判断两平面的位置关系.
5. 如果平面 $\alpha/\!/$平面 β，平面 $\beta/\!/$平面 γ，那么是否有平面 $\alpha/\!/$平面 γ？为什么？
6. 如图，从平面 ABC 外一点 P，引直线 PA, PB, PC，在它们上面分别取点 A', B', C'，使$\dfrac{PA'}{PA}=\dfrac{PB'}{PB}=\dfrac{PC'}{PC}$. 求证：平面 $ABC/\!/$平面 $A'B'C'$.

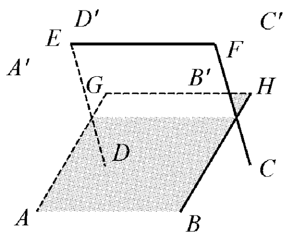


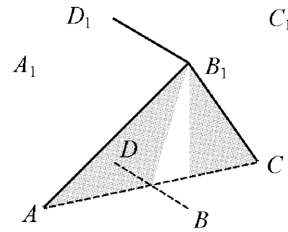


7. 如图,已知 AB 是平面 α 的垂线,AC 是平面 α 的斜线,$CD \subset \alpha$, $CD \perp AC$. 求证:平面 $ABC \perp$ 平面 ACD.

8. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中,若 $PA \perp$ 平面 $ABCD$,且 $ABCD$ 是菱形, 求证:平面 $PAC \perp$ 平面 PBD.

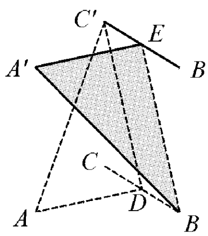
9. 如图,在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中,已知 E, F, G, H 分别是$A'D'$, $B'C'$,$D'D$,$C'C$ 的中点. 求证:平面 $AH \perp$ 平面 DF.

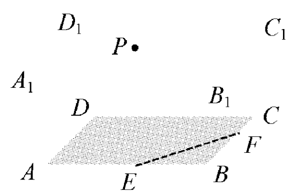




10. 如图,已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$,求证:平面 $B_1AC \perp$ 平面 B_1BDD_1.

11. 如图,在三棱柱 $ABC-A'B'C'$ 中,点 E, D 分别是 $B'C'$ 与 BC 的中点. 求证:平面 $A'EB \,/\!/$ 平面 ADC'.



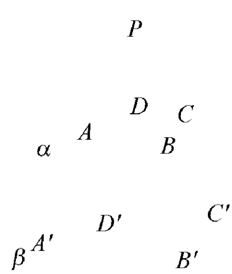


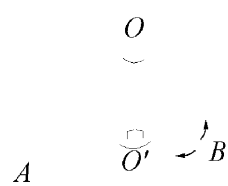
12. 如图,有一块长方体的木料,经过木料表面 $A_1B_1C_1D_1$ 内的一点 P,在这个面内画线段,使其与木料表面 $ABCD$ 内的线段 EF 平行,应该怎样画线?

13. 求证:如果一个平面与另一个平面的垂线平行,那么这两个平面互相垂直. 如果将条件改为"如果一个平面与另一个平面的垂面平行",那么结论是否仍然成立?

14. 三个平面两两垂直,求证:它们的交线也两两垂直.

15. 如图,平面 $\alpha \,/\!/$ 平面 β,点 P 是投影中心. 四边形 $ABCD$ 在 α 内,它在 β 内的投影为 $A'B'C'D'$.





(1) 四边形 $A'B'C'D'$ 与四边形 $ABCD$ 有何关系？

(2) 此图也可视为四棱锥 $P-A'B'C'D'$ 被平行于底面的平面 α 所截，那么，截面 $ABCD$ 具有什么性质？

16. （操作题）用硬纸剪一个不等边的锐角三角形 AOB，然后以 AB 边上的高 OO' 为折痕，折得两个直角三角形，使之直立于桌面上（如图），那么，$\angle AO'B$ 就是 $\angle AOB$ 在桌面上的射影. 转动其中一个直角三角形，观察 $\angle AOB$ 与 $\angle AO'B$ 的大小关系，是否存在某个位置，使 $\angle AOB = \angle AO'B$？

17. （阅读题）看图阅读：

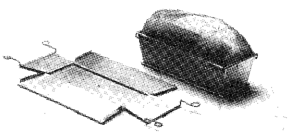
底面是平行四边形的四棱柱叫做 (parallelopiped)，侧棱与底面垂直的平行六面体叫做 (right parallelopiped)，底面是矩形的直平行六面体叫做 (cuboid)，棱长相等的长方体叫做 (cube).

底面是平行四边形　　侧棱和底面垂直　　底面是矩形　　棱长相等

四棱柱　　平行六面体　　直平行六面体　　长方体　　正方体

再回答：根据上述定义，试说明四棱柱集合、平行六面体集合、直平行六面体集合、长方体集合、正方体集合之间有怎样的包含关系，并用 Venn 图直观地表示这种关系.

柱、锥、台、球的表面积和体积



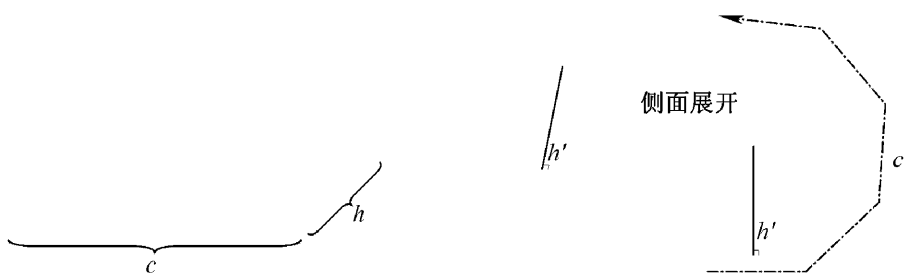
我们知道，多面体是由一些平面多边形围成的几何体. 一些简单的多面体可以沿着多面体的某些棱将它剪开而成平面图形，这个平面图形叫做该多面体的　　　　　(net).

在图 3－3－1 中，哪些图形是空间图形的平面展开图？

侧棱和底面垂直的棱柱叫做　　　　. 把直棱柱的侧面沿一条侧棱剪开后展在一个平面上，展开图的面积就是棱柱的侧面积.

直棱柱的侧面展开图是矩形(图 3－3－2)，这个矩形的长等于直棱柱的底面周长 c，宽等于直棱柱的高 h，因此直棱柱的侧面积是

$$S_{\text{直棱柱侧}} = ch.$$



(regular prism)是指底面为正多边形的直棱柱.

如果一个棱锥的底面是正多边形，并且顶点在底面的正投影是底面中心，我们称这样的棱锥为　　　　(regular pyramid). 正棱锥的侧棱长都相等.

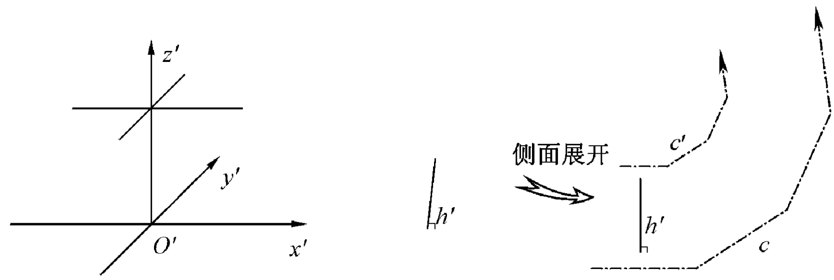
棱锥的侧面展开图是由各个侧面组成的，展开图的面积就是棱

锥的侧面积.如果正棱锥的底面周长为 c,斜高(即侧面等腰三角形底边上的高)为 h',由图 3－3－3 可知它的侧面积是

$$S_{\text{正棱锥侧}}=\frac{1}{2}ch'.$$

正棱锥被平行于底面的平面所截,截面和底面之间的部分叫做(regular truncated pyramid).与正棱锥的侧面积公式类似,若设正棱台的上、下底面的周长为 c', c,斜高为 h',则其侧面积是(图3－3－4)

$$S_{\text{正棱台侧}}=\frac{1}{2}(c+c')h'.$$

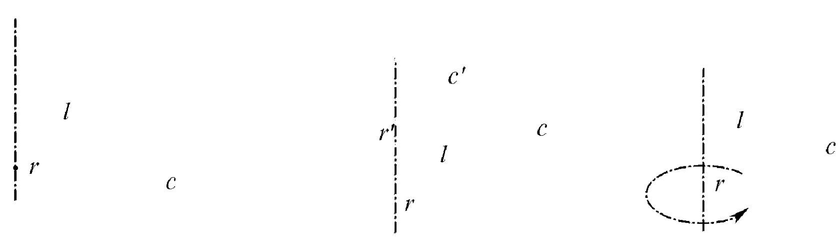


正棱柱、正棱锥和正棱台的侧面积公式之间的关系可用图3－3－5表示:

$S_{\text{正棱柱侧}}=ch$ 　 $c'=c$ 　 $S_{\text{正棱台侧}}=\frac{1}{2}(c+c')h'$ 　 $c'=0$ 　 $S_{\text{正棱锥侧}}=\frac{1}{2}ch'$

圆柱、圆锥和圆台的侧面可以沿其母线剪开后展在平面上,这时展开图的面积就是它们的侧面积.但球的表面是不可展的.

通过将圆柱、圆锥和圆台的侧面展开,我们可以得到它们的侧面积公式(图 3－3－6),它们之间的关系与图 3－3－5 类似.



$S_{\text{圆柱侧}}=cl=2\pi rl$ 　 $c'=c$ 　 $S_{\text{圆台侧}}=\frac{1}{2}(c+c')l=\pi(r+r')l$ 　 $c'=0$ 　 $S_{\text{圆锥侧}}=\frac{1}{2}cl=\pi rl$

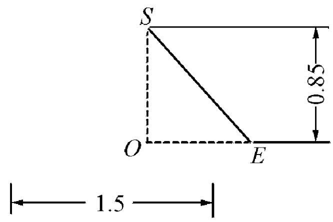
设计一个正四棱锥形冷水塔塔顶，高是 0.85 m，底面的边长是 1.5 m，制造这种塔顶需要多少平方米铁板？（保留两位有效数字）

本题即计算正四棱锥的侧面积，根据公式，只需计算斜高. 为此，在正四棱锥中作出相应的直角三角形，再解三角形即可.

如图 3－3－7，S 表示塔的顶点，O 表示底面的中心，则 SO 是高. 设 SE 是斜高.

在 $\mathrm{Rt}\triangle SOE$ 中，根据勾股定理得

$$SE=\sqrt{\left(\frac{1.5}{2}\right)^2+0.85^2}\approx 1.13(\mathrm{m}),$$



所以 $S_{正棱锥侧}=\frac{1}{2}ch'$

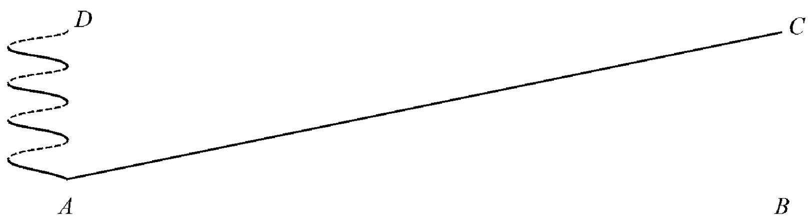
$$=\frac{1}{2}\times(1.5\times 4)\times 1.13$$

$$\approx 3.4(\mathrm{m}^2).$$

制造这种塔顶需要铁板约 3.4 m^2.

有一根长为 5 cm，底面半径为 1 cm 的圆柱形铁管，用一段铁丝在铁管上缠绕 4 圈，并使铁丝的两个端点落在圆柱的同一母线的两端，则铁丝的最短长度为多少厘米？（精确到 0.1 cm）

可以把圆柱沿这条母线展开，将问题转化为平面几何的问题.



把圆柱表面及缠绕其上的铁丝展开在平面上，得到矩形 $ABCD$，如图 3－3－8 所示.

由题意知 $BC=5\,\mathrm{cm}$，$AB=8\pi\,\mathrm{cm}$，点 A 与点 C 就是铁丝的起止位置，故线段 AC 的长度即为铁丝的最短长度.

$$AC=\sqrt{5^2+(8\pi)^2}$$

$$\approx 25.6(\mathrm{cm}).$$

铁丝的最短长度约为 25.6 cm.

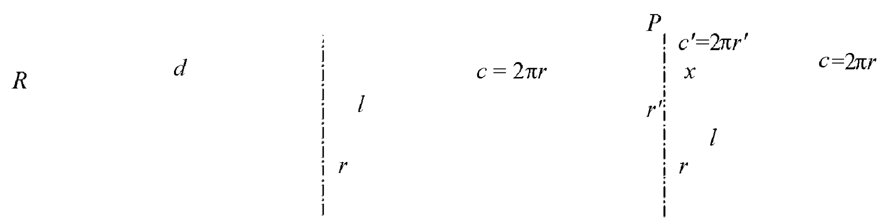
在本例中，应该怎样缠绕，才能使铁丝的长度最短?

圆锥、圆台侧面积公式的推导

先考察半径为 R，弧长为 d 的扇形的面积(图 3－3－9).

因为弧长等于 $2\pi R$ 的扇形(圆)的面积为 πR^2，所以弧长为 d 的扇形的面积为

$$S_{扇形}=\frac{d}{2\pi R}\cdot\pi R^2=\frac{1}{2}Rd.$$



圆锥侧面展开图是扇形(图 3－3－10)，这个扇形的半径为圆锥的母线长 l，扇形的弧长等于圆锥底面的周长 $c=2\pi r$，故圆锥的侧面积为

$$S_{圆锥侧}=\frac{1}{2}cl=\pi rl.$$

圆台侧面展开图是扇环(图 3－3－11)，其面积为两个扇形的面积之差，即

$$\begin{aligned}S_{圆台侧}&=\frac{1}{2}c(l+x)-\frac{1}{2}c'x\\&=\frac{1}{2}cl+\frac{1}{2}(c-c')x,\end{aligned}$$

其中，x 为图 3－3－11 中小圆锥的母线长.

由相似三角形的性质可知，$\frac{r}{r'}=\frac{x+l}{x}$，即$\frac{c}{c'}=\frac{x+l}{x}$，

所以$\frac{c-c'}{c'}=\frac{l}{x}$，故$(c-c')x=c'l$. 于是，

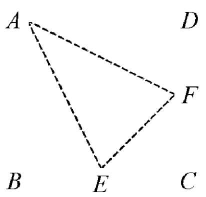
$$S_{圆台侧}=\frac{1}{2}cl+\frac{1}{2}c'l=\frac{1}{2}(c+c')l,$$

或

$$S_{圆台侧}=\pi(r+r')l.$$

1. 下列图形中，不是正方体的展开图的是(　　).

A.　　　B.　　　C.　　　D.



2. 如图，E，F 分别为正方形 $ABCD$ 的边 BC，CD 的中点，沿图中虚线折起来，它能围成怎样的几何体？

3. 用半径为 r 的半圆形铁皮卷成一个圆锥筒，那么这个圆锥筒的高是多少？

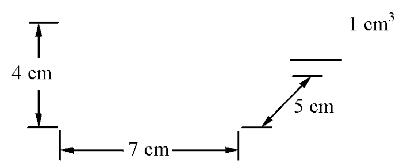
4. 一个正三棱锥的高和底面边长都为 a，求它的侧棱和底面所成角的余弦值.

5. 一个正三棱台的两个底面的边长分别等于 8 cm 和 18 cm，侧棱长等于 13 cm，求它的侧面积.

类似于用单位正方形的面积度量平面图形的面积，我们用单位正方体(棱长为 1 个长度单位的正方体)的体积来度量几何体的体积.

一个几何体的体积是单位正方体体积的多少倍，那么这个几何体的体积的数值就是多少.

例如，某长方体纸盒的长、宽、高分别为 7 cm，5 cm，4 cm，则每层有 7×5 个单位正方体(图 3－3－12)，共有 4 层，因此它的体积为



$$7\times5\times4=140\ (\text{cm}^3).$$

长方体的长、宽、高分别为 a，b，c，那么它的体积为

$$V_{长方体}=abc,$$

或

$$V_{长方体}=Sh.$$

这里 S，h 分别表示长方体的底面积和高.

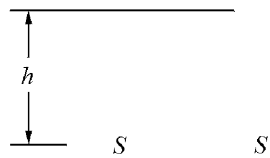
长方体体积公式是计算其他几何体体积的基础，我们将上述结论作为已知事实来运用.

棱柱(圆柱)可由多边形(圆)沿某一方向平移得到，因此，两个底面积相等、高也相等的棱柱(圆柱)应该具有相等的体积

(图 3－3－13).

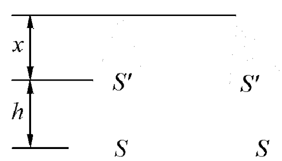
柱体(棱柱、圆柱)的体积等于它的底面积 S 和高 h 的积,即

$$V_{柱体}=Sh.$$



类似地,底面积相等、高也相等的两个锥体,它们的体积也相等(图 3－3－14). 由于底面积为 S,高为 h 的圆锥的体积为 $V_{圆锥}=\frac{1}{3}Sh$, 所以

$$V_{锥体}=\frac{1}{3}Sh.$$



台体(棱台、圆台)的体积可以转化为锥体的体积来计算(图 3－3－15). 如果台体的上、下底面面积分别为 S', S,高是 h,可以推得它的体积是

$$V_{台体}=\frac{1}{3}h(S+\sqrt{SS'}+S').$$

柱体、锥体、台体的体积公式之间的关系如下:

$V_{柱体}=Sh$ $\quad S'=S \quad$ $V_{台体}=\frac{1}{3}h(S+\sqrt{SS'}+S')$ $\quad S'=0 \quad$ $V_{锥体}=\frac{1}{3}Sh$

运用类似的方法我们还能证实这样一个有趣的结论:一个底面半径和高都等于 R 的圆柱,挖去一个以上底面为底面,下底面圆心为顶点的圆锥后,所得几何体的体积与一个半径为 R 的半球的体积相等(图3－3－16). 由此得到

$$\frac{1}{2}V_{球}=\pi R^2\cdot R-\frac{1}{3}\pi R^2\cdot R=\frac{2}{3}\pi R^3,$$

所以

$$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

设想一个球由许多顶点在球心，底面都在球面上的“准锥体”组成，这些“准锥体”的底面并不是真正的多边形，但只要这些“准锥体”的底面足够地小，就可以把它们近似地看成棱锥(图 3－3－17).

这时，这些“准锥体”的高趋向于球半径 R，底面积 S_1，S_2，S_3，…的和趋向于球面积，所有这些“准锥体”的体积的和趋向于球的体积，因此

$$\frac{4}{3}\pi R^3=V_{球}=\frac{1}{3}RS_1+\frac{1}{3}RS_2+\frac{1}{3}RS_3+\cdots=\frac{1}{3}RS_{球面},$$

所以

$$S_{球面}=4\pi R^2.$$

它表明球的面积是球的大圆面积的 4 倍.

有一堆相同规格的六角螺帽毛坯(图 3－3－18)共重5.8 kg. 已知底面六边形边长是 12 mm，高是 10 mm，内孔直径是10 mm. 那么约有毛坯多少个？(铁的比重是 7.8 g/cm^3)

六角螺帽毛坯的体积是一个正六棱柱的体积与一个圆柱的体积的差，再由比重算出一个六角螺帽毛坯的重量即可.

$$因为V_{正六棱柱}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 12^2\times 6\times 10\approx 3.74\times 10^3(\mathrm{mm}^3),$$

$$V_{圆柱}=3.14\times\left(\frac{10}{2}\right)^2\times 10\approx 0.785\times 10^3(\mathrm{mm}^3),$$

所以一个毛坯的体积为

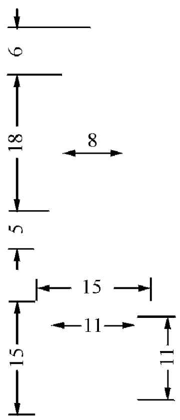
$$V = 3.74 \times 10^3 - 0.785 \times 10^3$$
$$\approx 2.96 \times 10^3 (\text{mm}^3)$$
$$= 2.96 (\text{cm}^3).$$

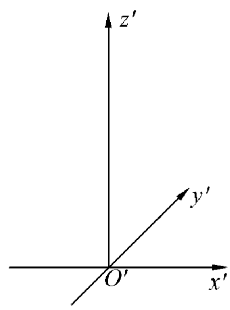
约有毛坯　$5.8 \times 10^3 \div (7.8 \times 2.96) \approx 251$(个).

这堆毛坯约有 251 个.

图 3－3－19 是一个奖杯的三视图(单位：cm)，试画出它的直观图，并计算这个奖杯的体积(精确到 0.01 cm).

采用斜二测画法. 先画底座，这是一个正四棱台；再画杯身，是长方体；最后画出球体. 如图 3－3－20.





因为　$V_{\text{正四棱台}} = \dfrac{1}{3} \times 5 \times (15^2 + 15 \times 11 + 11^2) \approx 851.667,$

$V_{\text{长方体}} = 6 \times 8 \times 18 = 864,$

$V_{\text{球}} = \dfrac{4}{3}\pi \times 3^3 \approx 113.097,$

所以这个奖杯的体积为

$$V = V_{\text{正四棱台}} + V_{\text{长方体}} + V_{\text{球}} \approx 1\,828.76 (\text{cm}^3).$$

计算组合体的体积时，应考虑将其转化为计算柱、锥、台、球等常见几何体的体积.

1. 用一张长 12 cm、宽 8 cm 的矩形铁皮围成圆柱形的侧面，求这个圆柱的体积.

2. 已知一个铜质的五棱柱的底面积为 16 cm^2，高为 4 cm，现将它熔化后铸成一个正方体的铜块，那么铸成的铜块的棱长为多少(不计损耗)?

3. 若一个六棱锥的高为 10 cm，底面是边长为 6 cm 的正六边形，求这个六棱锥的体积.

4. 一个正四棱台形油槽可以装煤油 190 升，假如它的上、下底边长分别等于 60 cm 和 40 cm，求它的深度.

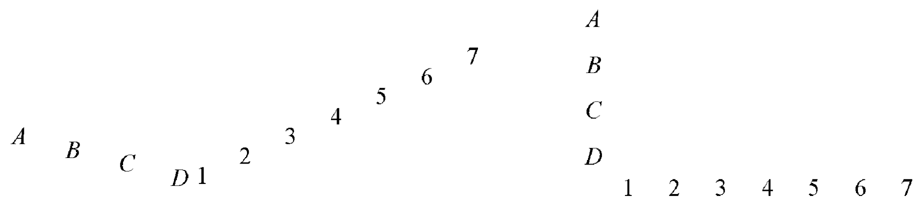
5. 钢球由于热膨胀而使半径增加千分之一，那么它的体积增加约几分之几？

6. 计算地球的表面积(地球的半径约为 6 370 km).

体积的近似计算

在有些情况下，我们需要用近似方法来计算体积. 例如，铺路时估算挖掘的土方量；两头分别为矩形和圆的通风管道，它的体积也需要估算. 下面是两种常用的近似计算体积的方法.

(1) 用网格分割某区域，如果知道每个网格点的高度(深度)，我们就能估算这一区域的体积(图 3－3－21).



设某小方格四个角上的高度为 h_1, h_2, h_3, h_4. 我们将这个小正方形区域近似地看成长方体，它的底面积为网格小正方形的面积 A，高取 h_1, h_2, h_3, h_4 的平均值. 因此这一小区域的体积可用

$$A\cdot\frac{h_1+h_2+h_3+h_4}{4}$$

来估算，于是整块区域的体积为

$$V\approx\frac{1}{4}\times A\times(H_1+2H_2+3H_3+4H_4), \qquad (*)$$

其中，H_1＝仅位于一个小区域上的格点的高度之和，

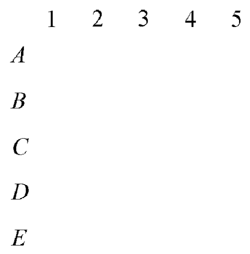
H_2＝仅位于两个小区域上的格点的高度之和，

H_3＝仅位于三个小区域上的格点的高度之和，

H_4＝仅位于四个小区域上的格点的高度之和.

在图 3－3－21 中，仅位于一个小区域上的格点为 $A1$, $A6$, $C7$, $D1$, $D7$；仅位于两个小区域上的格点为 $A2$, $A3$, $A4$, $A5$, $B1$, $B6$, $C1$, $D2$, $D3$, $D4$, $D5$, $D6$；仅位于三个小区域上的格点为 $C6$；仅位于四个小区域上的格点为 $B2$, $B3$, $B4$, $B5$, $C2$, $C3$, $C4$, $C5$.

在图 3－3－22 的网格区域内拟建一座工厂，每个网格的面积为 20 m×20 m，格点处的深度(单位：m)如表所示，在此深度内的土石需要挖走. 试估算：



	1	2	3	4	5
A	4.575	4.002	3.917	3.571	3.000
B	5.001	4.597	3.718	3.200	3.199
C	5.213	4.777	2.517	2.818	3.222
D	4.876	4.213	3.000		
E	4.213	3.917	3.517		

1）应挖走的土方；

2）挖掘机挖土时，泥土因变松而使体积增加 15%，如果每辆翻斗车能装运 18 m^3，那么运走这些土石需要多少车次？

1）我们用模型（*）来估算.先求出 $H_1 \sim H_4$：

$$H_1 = 4.575 + 3.000 + 3.222 + 4.213 + 3.517 = 18.527\ (\mathrm{m}),$$

$$H_2 = 4.002 + 3.917 + 3.571 + 5.001 + 3.199 + 5.213 + 2.818 + 4.876 + 3.000 + 3.917 = 39.514\ (\mathrm{m}),$$

$$H_3 = 2.517\ (\mathrm{m}),$$

$$H_4 = 4.597 + 3.718 + 3.200 + 4.777 + 4.213 = 20.505\ (\mathrm{m}).$$

又网格正方形的面积为

$$A = 20 \times 20 = 400\ (\mathrm{m}^2),$$

因此，应挖走的土方为

$$\begin{aligned} V &\approx \frac{1}{4} \times A \times (H_1 + 2H_2 + 3H_3 + 4H_4) \\ &= \frac{1}{4} \times 400 \times (18.527 + 2 \times 39.514 + 3 \times 2.517 + 4 \times 20.505) \\ &= 18\,712.6\ (\mathrm{m}^3). \end{aligned}$$

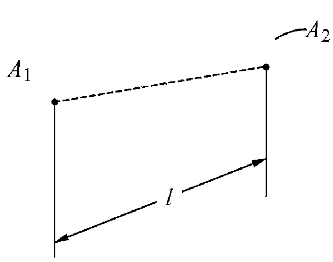
2）共需

$$18\,712.6 \times 115\% \div 18 \approx 1\,196(\text{车次}).$$

（2） 如果几何体的剖面由一种形状逐渐变化为另一种形状，这时可用两头面积的平均值来估算.

如图 3-3-23，该几何体的体积为

$$V \approx \frac{A_1 + A_2}{2} \times l.$$



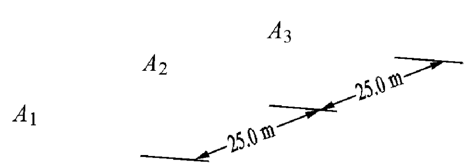


图 3－3－24 显示了某路段的三个横断面，其面积分别为 $A_1 = 46.2\,\mathrm{m}^2$，$A_2 = 52.7\,\mathrm{m}^2$，$A_3 = 35.3\,\mathrm{m}^2$，相邻两个横断面的间距为 25.0 m. 筑路时需将这部分沙土清除掉，试估算这部分沙土的体积.

先计算 A_1 和 A_2 之间的体积，

$$V_1 \approx \frac{1}{2} \times (A_1 + A_2) \times l$$

$$= \frac{1}{2} \times (46.2 + 52.7) \times 25$$

$$= 1\,236.25\ (\mathrm{m}^3).$$

再计算 A_2 和 A_3 之间的体积，

$$V_2 \approx \frac{1}{2} \times (A_2 + A_3) \times l$$

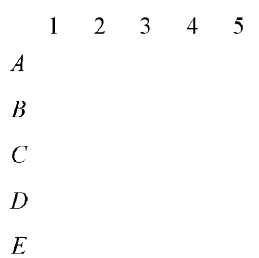
$$= \frac{1}{2} \times (52.7 + 35.3) \times 25$$

$$= 1\,100\ (\mathrm{m}^3).$$

因此，需清运沙土的体积约为

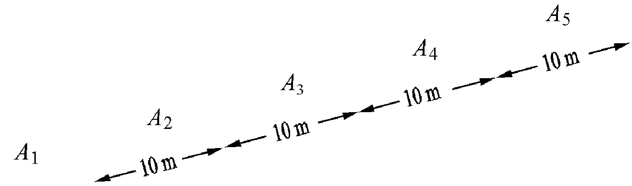
$$1\,236.25 + 1\,100 \approx 2\,336.25\ (\mathrm{m}^3).$$

1. 某优质煤矿覆盖层的网格图(每个小正方形网格的面积为 $10 \times 10\ \mathrm{m}^2$)及深度(单位：m)表如下. 现欲露天开采这一煤矿，试估算需要清除的覆盖层的体积.

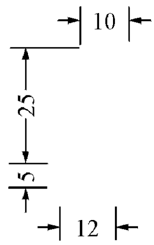


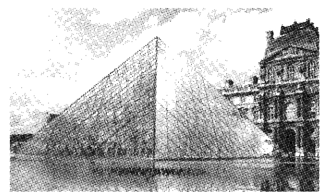
	1	2	3	4	5
A		5.180	7.203	4.182	3.980
B	6.732	6.108	5.819	8.234	7.410
C	4.287	7.154	6.104	6.205	5.657
D	5.345	5.254	8.290		
E		5.452	7.235		

2. 如图，某巷道的五个横断面面积为 $A_1 = 40.1\ \mathrm{m}^2$，$A_2 = 42.5\ \mathrm{m}^2$，$A_3 = 43.7\ \mathrm{m}^2$，$A_4 = 42.1\ \mathrm{m}^2$，$A_5 = 38.7\ \mathrm{m}^2$，两个相邻横断面之间的距离均为 10 m. 试估算这一巷道的体积.



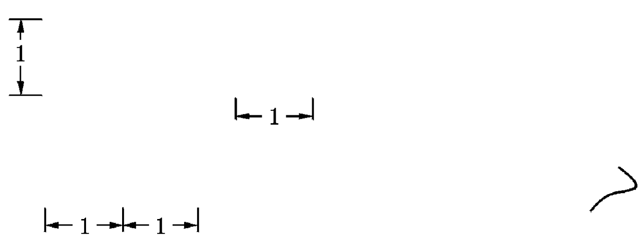
1. 除锈滚筒是正六棱柱形（两端是封闭的），筒长 1.6 m，底面外接圆半径是 0.46 m，制造这个滚筒需要多少平方米铁板？（精确到 0.1 m^2）
2. 一个正六棱锥的底面边长为 6 cm，高为 15 cm，画出它的直观图（比例尺为 1∶3），并计算该棱锥的体积.
3. 要电镀螺杆（尺寸如图，单位：mm），如果每平方米用锌 0.11 kg，电镀 100 个这样的螺杆需要锌多少千克？





4. 某展览馆外墙为正四棱锥的侧面，四个侧面均为底边长为35.4 m，高为 27.9 m 的等腰三角形，试求：
（1）展览馆的高度；（2）外墙的面积；（3）该四棱锥的体积.
5. （1）火星的半径约是地球的一半，地球表面积是火星表面积的多少倍？
（2）木星的表面积约是地球的 120 倍，它的体积约是地球的多少倍？
6. 有一种空心钢球，质量为 142 g，测得外径等于 5.0 cm，求它的内径（钢的密度为 7.9 g/cm^3，精确到 0.1 cm）.
7. 用油漆涂 100 个圆台形水桶，桶口直径为 30 cm，桶底直径为 25 cm，母线长是 27.5 cm. 已知每平方米需要油漆 150 g，共需油漆多少千克？（桶内外侧都要涂）

8. 一几何体的三视图如图所示.
（1）试画出它的直观图；
（2）指出它表面中的平行平面，并求出它的体积.

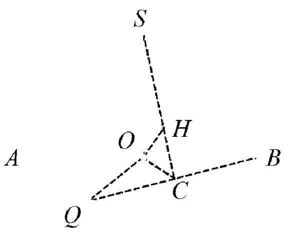


9. 如图，某养路处建造圆锥形仓库用于贮藏食盐（供融化高速公路上的积雪之用）. 已建的仓库的底面直径为 12 m，高 4 m. 养路处拟建一个更大的圆锥形仓库，以存放更多的食盐. 现有两个方案：一是新建仓库的底面直径比原来的大 4 m（高不变），二是高度增加 4 m（底面直径不变）.

（1）分别计算按这两个方案所建仓库的体积；

（2）分别计算按这两个方案所建仓库的表面积；

（3）哪一个方案更经济些？



10. 如图，圆锥的轴截面 SAB 为等腰直角三角形，Q 为底面圆周上的一点，如果 QB 的中点为 C，$OH\perp SC$，垂足为 H.

（1）求证：$BQ\perp$ 平面 SOC；

（2）求证：$OH\perp$ 平面 SBQ；

（3）设 $\angle AOQ=60^\circ$，$QB=2\sqrt{3}$，求此圆锥的体积.

11. 有两块面积相同的正三角形纸片，要求用其中一块剪拼成一个正三棱锥模型，另一块剪拼成一个正三棱柱模型，使它们的全面积与原三角形的面积相等.

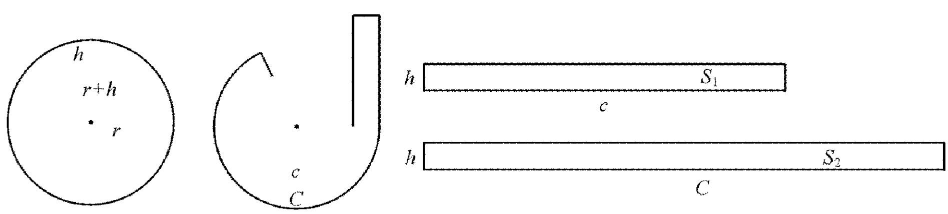
（1）请设计一种剪拼方法，分别用虚线标示在图（1）、图（2）中，并作简要说明；

（2）试比较你剪拼的正三棱锥与正三棱柱体积的大小.

（1）　　　　（2）

12.（操作题）有一张任意三角形纸片，要求剪拼成一个直三棱柱模型，使它的全面积与给出的三角形的面积相等. 请设计一种剪拼方法，用虚线标示在图中，并作简要说明.

13.（阅读题）　假设半径为 r 的圆的面积为 $A=\pi r^2$，我们用下面的方法推出圆的周长公式 $c=2\pi r$.



如图，设 h 是一个正数，考察半径分别为 r 和 $r+h$ 的两个同心圆所围成的圆环（圆中阴影区域）. 这个圆环的面积为

$$B=\pi(r+h)^2-\pi r^2=2\pi rh+\pi h^2.$$

可以看出，$S_1<B<S_2$，其中 S_1 是以小圆周长为长，h 为宽的矩形面积，S_2 是以大圆周长为长，h 为宽的矩形面积.

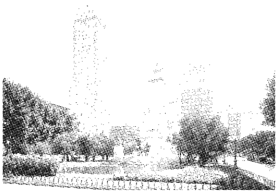
所以有　$ch<2\pi rh+\pi h^2<Ch$，即　$c<2\pi r+\pi h<C$.

假若 h 越来越小（趋于 0），那么大圆的周长 C 趋近于小圆的周长 c，且 πh 趋于 0，因此我们得到

$$c\leqslant 2\pi r\leqslant c.$$

从而 $c=2\pi r$.

假设半径为 R 的球的体积为 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$，那么球面积等于 $4\pi R^2$.



1. 观察学校、公园或城市中的建筑，描述它们的基本结构，尝试画出其直观图或三视图.
2. 到附近工厂了解三视图在模具设计与零件加工中的应用，选择某零件实物，画出其三视图.
3. 访问家装公司或广告公司，了解立体几何在家装设计、广告设计、商标设计中的应用.
4. 到商店或超市观察商品包装方式，研究空间图形的展开与折叠在商品包装中的应用.

祖 暅 原 理

取一摞书或一摞纸张堆放在桌面上，将它如图 3－3－25 那样改变一下形状，这时高度没有改变，每页纸的面积也没有改变，因而这摞书或纸张的体积与变形前相等.

我国齐梁时代的数学家、祖冲之的儿子祖暅（公元前 5 到 6 世纪）提出一条原理："幂势既同，则积不容异."这里"幂"指水平截面的面积，"势"指高. 因此，这句话的意思是：两等高的几何体若在所有等高处的水平截面的面积相等，则这两个几何体的体积相等（如图 3－3－26）.

S　　S　　S

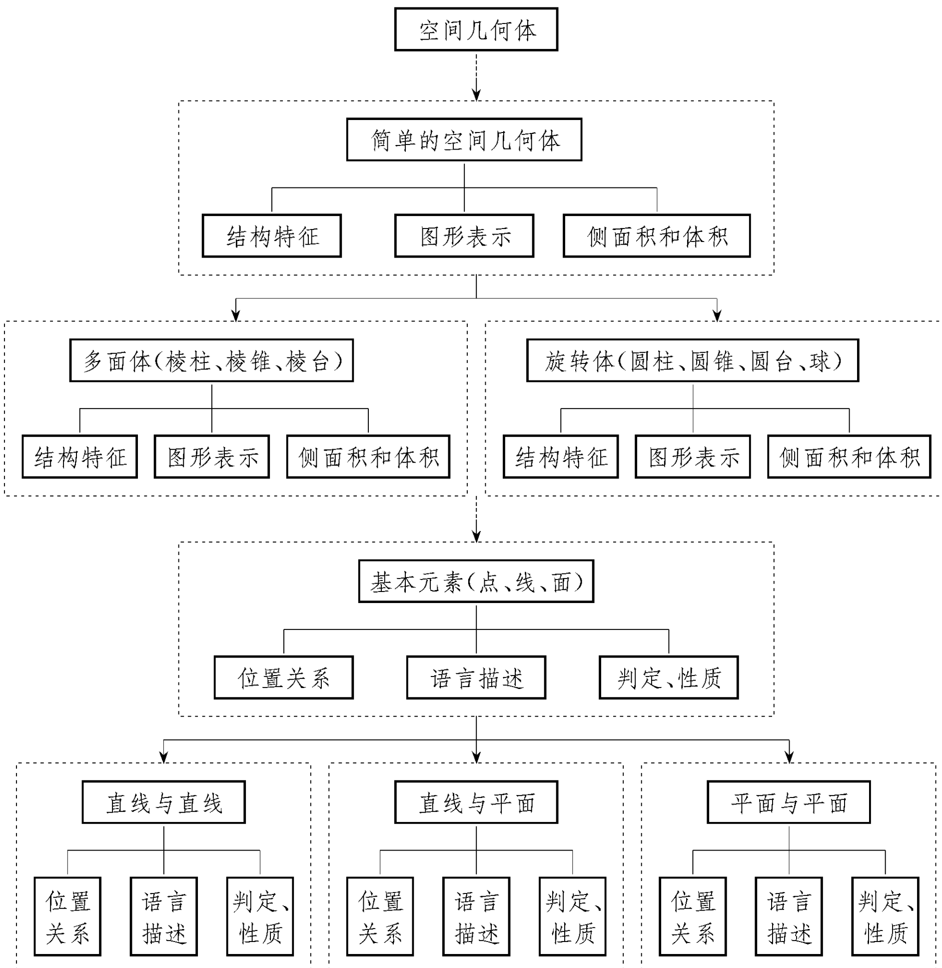
祖暅不仅首次明确地提出了这一原理，还成功地将其应用于球体积的推算．我们把这条原理称为　　　　.

祖暅原理在西方文献中称"卡瓦列利原理"，它在 1653 年由意大利数学家卡瓦列利（B. Cavalieri，1598～1647）独立提出，对微积分的建立有重要影响.

以长方体体积公式和祖暅原理为基础，我们就可以求出柱、锥、台、球等几何体的体积.

本章回顾

我们首先从直观上认识了柱、锥、台、球及其简单组合体的结构特征.借助长方体模型,抽象出空间点、线、面位置关系.学习了可作为推理依据的4个公理,以及线线、线面、面面平行或垂直的判定与性质定理,并运用这些知识解决有关空间位置关系的简单推理论证及应用问题.



学习本章应注意体会"转化"的思想方法,如面面垂直与线面垂直的转化、线面平行与线线平行的转化,并善于将空间问题转化为平面问题来处理.

1. 若长方体三个面的面积分别是$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{6}$，则长方体的对角线的长等于(　　).

A. $2\sqrt{2}$　　B. $3\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{6}$

2. 在正方体的八个顶点中，有四个恰好是正四面体的顶点，则正方体的表面积与此正四面体的表面积的比值为(　　).

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

3. 一个二面角的两个面与另一个二面角的两个面分别互相垂直，这两个二面角的大小关系是(　　).

A. 相等　　B. 互补　　C. 相等或互补　　D. 不确定

4. 如图，一个封闭的立方体，它的六个表面各标出A，B，C，D，E，F这六个字母. 现放成下面三种不同的位置，所看见的表面上的字母已标明，则字母A，B，C对面的字母分别为(　　).

B　A　C　　　D　C　A　　　B　C　E

A. D，E，F　　B. F，D，E　　C. E，F，D　　D. E，D，F

5. 一个四面体的所有棱长都为$\sqrt{2}$，四个顶点在同一个球面上，则此球的表面积为(　　).

A. 3π　　B. 4π　　C. $3\sqrt{3}\pi$　　D. 6π

6. 一个球放在地面上，影子伸展到距球与地平面接触点 10 m 处，这时 1 m 长的尺子垂直放在地面上时的影长是$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ m，则球的半径是________.

7. 指出下列命题是否正确，并说明理由：

(1) 矩形的平行投影一定是矩形；

(2) 梯形的平行投影一定是梯形；

(3) 两条相交直线的平行投影不可能平行；

(4) 平行四边形的平行投影可能是正方形；

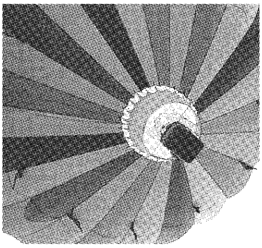
(5) 正方形的平行投影一定是菱形.

8. 两个空间图形的三视图如下，分别画出其实物的大致形状，并指出它们是什么几何体.

(1)　　　　(2)

9. 画出如图所示的四棱锥的三视图(带阴影的面为正面),其中底面为正方形,带阴影的侧面为正三角形,且垂直于底面.

10. 用长、宽分别是 3π 与 π 的矩形硬纸卷成圆柱的侧面,试求圆柱底面的半径.

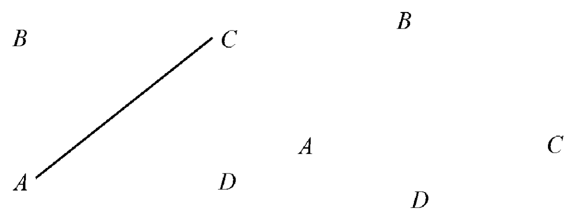


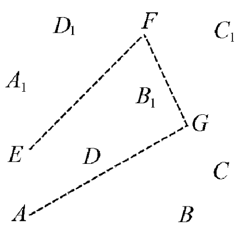
11. 如图,某人打算用 A 型材料制作一个近似于球形的热气球,半径为 10 m.

(1) 制作这样一个热气球,大约需要多少材料?

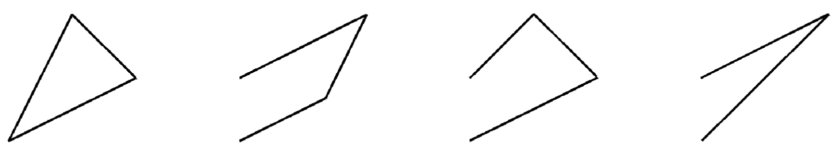
(2) 如果 A 型材料的价格为 280 元/m^2,试估计用料的总费用. 如果直径增加 4 m,那么需增加多少费用?

12. 如图,把长、宽各为 4, 5 的长方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折成直二面角,求顶点 B 和 D 之间的距离.





13. 如图,正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,E, F 分别是 AA_1, D_1C_1 的中点,G 是正方形 BCC_1B_1 的中心,则空间四边形 $AEFG$ 在该正方体的面上的正投影不可能是(　　).



A.　　B.　　C.　　D.

14. 如图,有一轴截面为正三角形的圆锥形容器,内部盛水的高度为 h,放入一球后,水面恰好与球相切,求球的半径.

15. 设 P, A, B, C 是球 O 面上的四个点,PA, PB, PC 两两垂直,且 $PA = PB = PC = 1$,求球的体积与表面积.

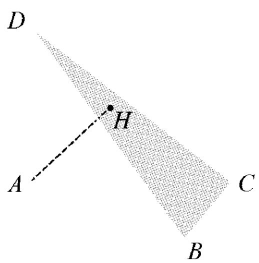
16. 设 $A \in \alpha$, AB 是 α 的一条斜线,$\angle ABC$ 是一个直角.

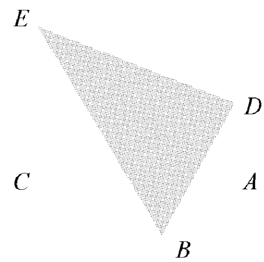
求证:(1) 若 $BC /\!/ \alpha$,则$\angle ABC$ 在 α 内的正投影也是直角;

(2) 若$\angle ABC$ 在 α 内的正投影也是直角,则 $BC /\!/ \alpha$.

17. 如图,已知 $\triangle ABC$ 中,$\angle BAC = 60^\circ$,$AD \perp$ 平面 ABC, $AH \perp$ 平面 BCD,

H 为垂足,求证:H 不可能是 $\triangle BCD$ 的垂心.





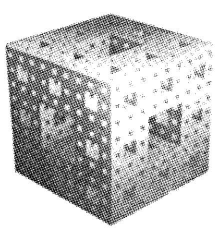
18. 如图,已知在 $\triangle ABC$ 中,$AB=AC$, $AD\perp$ 平面 ABC,$EC\perp$ 平面 ABC,且 $CE=2AD$,求证:平面 $BDE\perp$ 平面 BCE.

19. 正方体、等边圆柱(底面直径和高相等的圆柱)、球的体积相等,则哪一个表面积最小?

20. 三个球的半径的比是 1∶2∶3,求证:其中最大的一个球的体积是另两个球的体积之和的 3 倍.

21. (操作题)有两块长和宽分别为 a, b 的矩形($a<b$),四块上、下底分别为 a, b,底角为 60°的等腰梯形厚纸板,如何将它们拼接成一个封闭的几何体模型?试根据实物模型,画出这个几何体的直观图、三视图和展开图.

22. 将棱长为 1 的正方体的每条棱三等分,将正方体分为 27 个小正方体(图(1)),再将位于 6 个表面中心的小正方体挖去,得到图(2),试计算图(2)这个几何体的表面积和体积.用类似的方法再操作一次,得到图(3),你能计算这个几何体的表面积和体积吗?



(1)　　　　(2)　　　　(3)

第 4 章　平面解析几何初步

- 平面解析几何初步
  - 直线与方程
    - 直线的斜率
    - 直线的方程
      - 点斜式
      - 两点式
      - 一般式
    - 两条直线的平行与垂直
    - 两条直线的交点
    - 平面上两点间的距离
    - 点到直线的距离
  - 圆与方程
    - 圆的方程
    - 直线与圆的位置关系
    - 圆与圆的位置关系
  - 空间直角坐标系
    - 空间直角坐标系
    - 空间两点间的距离

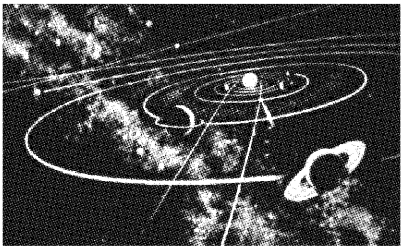
如果代数与几何各自分开发展，那它的进步将十分缓慢，而且应用范围也很有限. 但若两者互相结合而共同发展，则就会相互加强，并以快速的步伐向着完美化的方向猛进.

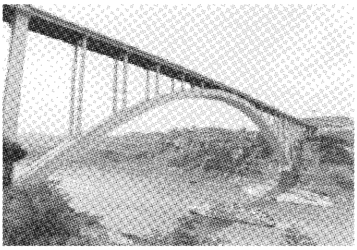
——拉格朗日

现实世界中，到处有美妙的曲线. 从飞逝的流星到雨后的彩虹，从古代石拱桥到现代立交桥……这些曲线都和方程息息相关.

行星围绕太阳运行，人们要认识行星的运行规律，首先就要建立起行星运行的轨道方程.

在建造桥梁时，我们首先要确定桥拱的方程，然后才能进一步地设计和施工.





引进平面直角坐标系，用有序数对$(x,\ y)$表示平面内的点. 根据曲线的几何性质，可以得到关于x，y的一个代数方程$f(x,\ y)=0$. 反过来，把代数方程$f(x,\ y)=0$的解$(x,\ y)$看做平面上点的坐标，这些点的集合是一条曲线.

我们知道，直线和圆是基本的几何图形. 那么，

如何建立它们的方程？

如何通过方程来研究它们的性质？

直线与方程

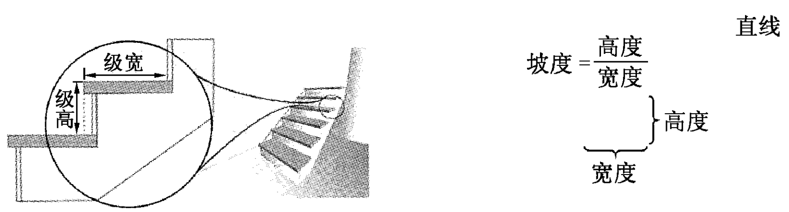
直线是最常见的图形，过一点沿着确定的方向就可以画出一条直线.

如何用数学语言刻画直线的方向，进而建立直线的方程？

如何利用直线的方程研究直线的位置关系？

确定直线位置的要素除了点之外，还有直线的倾斜程度. 通过建立直角坐标系，点可以用坐标来刻画. 那么，直线的倾斜程度如何来刻画呢？

楼梯或路面的倾斜程度可用坡度来刻画(图 4－1－1).

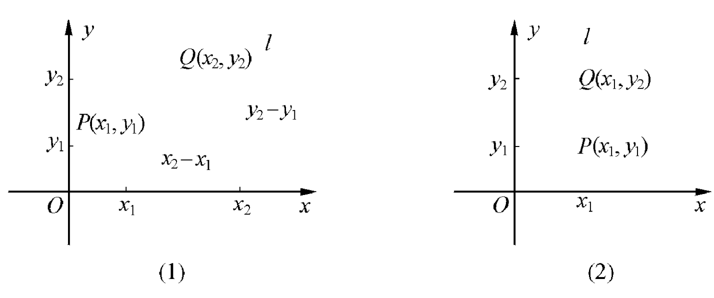


可以看出，如果楼梯台阶的宽度(级宽)不变，那么每一级台阶的高度(级高)越大，坡度就越大，楼梯就越陡.

在平面直角坐标系中，我们可以类似地利用这种方法来刻画直线的倾斜程度.

如图 4－1－2(1)，已知两点 $P(x_1, y_1)$，$Q(x_2, y_2)$，如果 $x_1 \neq x_2$，那么直线 PQ 的 (slope)为

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \quad (x_1 \neq x_2).$$

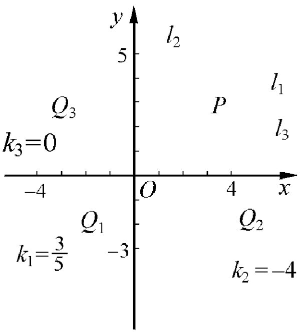


如果 $x_1 = x_2$，那么直线 PQ 的斜率不存在(图 4－1－2(2)).

如图 4－1－2(1)，对于与 x 轴不垂直的直线 PQ，它的斜率也可以看做是

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{纵坐标的增量}}{\text{横坐标的增量}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

对于一条与 x 轴不垂直的定直线而言，它的斜率是一个定值，由该直线上任意两点确定的斜率总是相等的.



如图 4－1－3，直线 l_1，l_2，l_3 都经过点 $P(3, 2)$，又 l_1，l_2，l_3 分别经过点 $Q_1(-2, -1)$，$Q_2(4, -2)$，$Q_3(-3, 2)$，试计算直线 l_1，l_2，l_3 的斜率.

设 k_1，k_2，k_3 分别表示直线 l_1，l_2，l_3 的斜率，则

$$k_1 = \frac{-1-2}{-2-3} = \frac{3}{5},\ k_2 = \frac{-2-2}{4-3} = -4,\ k_3 = \frac{2-2}{-3-3} = 0.$$

由图 4－1－3 可以看出：

(1) 当直线的斜率为正时，直线从左下方向右上方倾斜(l_1)；

(2) 当直线的斜率为负时，直线从左上方向右下方倾斜(l_2)；

(3) 当斜率为 0 时，直线与 x 轴平行(l_3).

经过点(3，2)画直线，且使直线的斜率分别为：

(1) $\frac{3}{4}$；　　　　(2) $-\frac{4}{5}$.

要画出直线，只需再确定直线上另一个点的位置.

(1) 根据

$$\text{斜率} = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

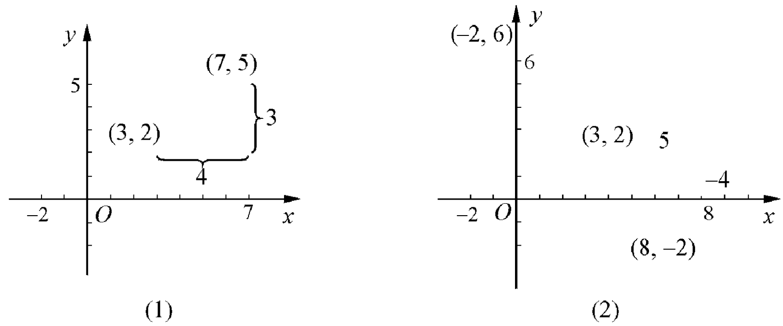
斜率为$\frac{3}{4}$ 表示直线上的任一点沿 x 轴方向向右平移 4 个单位，再沿 y 轴方向向上平移 3 个单位后仍在此直线上.

如果我们从点(3，2)开始，向右平移 4 个单位，再向上平移 3 个单位，就得到点(7，5).

因此，通过点(7，5)和点(3，2)画直线，即得所求(图 4－1－4(1)).

(2) $-\frac{4}{5} = \frac{-4}{5}$，

因此，将点(3，2)向右平移 5 个单位，再向下平移 4 个单位，得到点(8，−2). 通过点(8，−2)和点(3，2)画直线，即得所求(图 4－1－4(2)).



在平面直角坐标系中，对于一条与 x 轴相交的直线，把 x 轴所在的直线绕着交点按逆时针方向旋转到和直线重合时所转过的最小正角称为这条直线的　　　(inclination)，并规定：

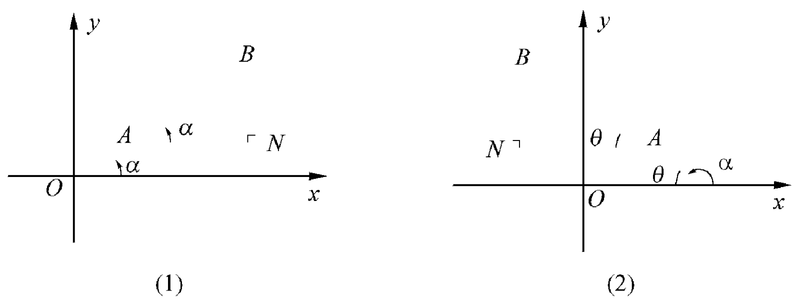
与 x 轴平行或重合的直线的倾斜角为 $0°$.

由定义可知，直线的倾斜角 α 的取值范围是

$$0° \leqslant \alpha < 180°.$$

当直线的斜率为正时，直线的倾斜角为锐角(图 4－1－5(1))，此时，

$$k=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{BN}{AN}=\tan\alpha.$$



当直线的斜率为负时，直线的倾斜角为钝角(图 4－1－5(2))，此时，

$$\begin{aligned}k&=\frac{\Delta y}{\Delta x}\\&=\frac{BN}{-AN}\\&=-\tan\theta\\&=-\tan(180°-\alpha).\end{aligned}$$

当 α 为钝角时，我们规定

$$\tan\alpha=-\tan(180°-\alpha).$$

因此，当直线与 x 轴不垂直时，直线的斜率 k 与倾斜角 α 之间满足

$$k=\tan\alpha.$$

观察下表，当直线的倾斜角逐渐增大时，直线的斜率是如何变化的？

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	α（度）	5	10	15	20	25	30	35	40	45
2	$k=\tan\alpha$	0.087489	0.176327	0.267949	0.36397	0.466308	0.57735	0.700208	0.8391	1
3	α（度）	50	55	60	65	70	75	80	85	90
4	$k=\tan\alpha$	1.191754	1.428148	1.732051	2.144507	2.747477	3.732051	5.671282	11.43005	
5	α（度）	95	100	105	110	115	120	125	130	135
6	$k=\tan\alpha$	-11.4301	-5.67128	-3.73205	-2.74748	-2.14451	-1.73205	-1.42815	-1.19175	-1
7	α（度）	140	145	150	155	160	165	170	175	180
8	$k=\tan\alpha$	-0.8391	-0.70021	-0.57735	-0.46631	-0.36397	-0.26795	-0.17633	-0.08749	-1.2E-16

如果变量有规律地变化，那么利用计算器可快速地计算相应的函数值. 下面计算 $\tan 5°$，$\tan 10°$，$\tan 15°$，….

(1) 赋初值 $0\to x$（即 $x=0$），按键顺序为 0 SHIFT STO X

(2) 计算 $\tan x$：tan ALPHA X =

(3) 使 x 的值逐渐增加，即 $x+5\to x$，按键顺序为

ALPHA X + 5 SHIFT STO X

(4) 重复计算：反复按 ▲ = ，即可得 $\tan 5°$，$\tan 10°$，$\tan 15°$，…的值.

1. 分别求经过下列两点的直线的斜率：

(1) $(2,\ 3)$，$(4,\ 0)$；　　(2) $(-2,\ 3)$，$(2,\ 1)$；

(3) $(-3,\ -1)$，$(2,\ -1)$；　　(4) $(-1,\ 3)$，$(\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$.

2. 根据下列条件，分别画出经过点 P，且斜率为 k 的直线：

(1) $P(1,\ 2)$，$k=3$；　　(2) $P(2,\ 4)$，$k=-\dfrac{3}{4}$；

(3) $P(-1,\ 3)$，$k=0$；　　(4) $P(-2,\ 0)$，斜率不存在.

3. 已知直线上一点的坐标及斜率，写出直线上另一点的坐标(答案不惟一)：

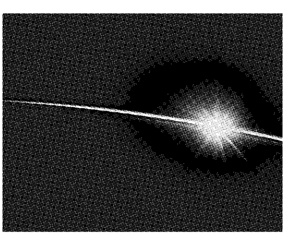
(1) 斜率 4，点$(1,\ 2)$；　　(2) 斜率 -2，点$(-2,\ -3)$；

(3) 斜率 $-\dfrac{3}{2}$，点$(2,\ -4)$；　　(3) 斜率$\dfrac{4}{3}$，点$(-3,\ 2)$.

4. 分别判断下列三点是否在同一直线上：

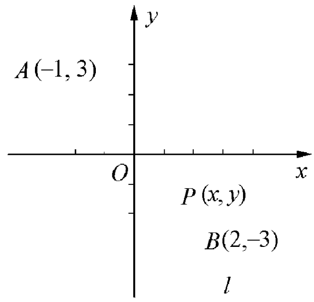
(1) $(0,\ 2)$，$(2,\ 5)$，$(3,\ 7)$；　　(2) $(-1,\ 4)$，$(2,\ 1)$，$(-2,\ 5)$.

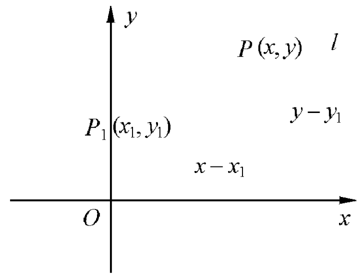
5. 已知两点 $A(1,\ -1)$，$B(3,\ 3)$，点 $C(5,\ a)$在直线 AB 上，求实数 a 的值.



飞逝的流星形成了一条美丽的弧线，这条弧线可以看做是满足某种运动规律的点的集合. 在平面直角坐标系中，直线也可以看做是满足某种条件的点的集合. 直线的位置既可由两点惟一确定，也可由一点和一个方向来确定.

若直线 l 经过点 $A(-1,\ 3)$，斜率为 -2，点 P 在直线 l 上运动，那么点 P 的坐标$(x,\ y)$满足什么条件(图 4－1－6)？





点 P 的坐标为$(x,\ y)$,那么当点 P 在直线 l 上运动时(除点 A 外),点 P 与定点$A(-1,\ 3)$所确定的直线的斜率恒等于-2,故有

$$\frac{y-3}{x-(-1)}=-2,$$

即

$$y-3=-2[x-(-1)].$$

显然,点 $A(-1,\ 3)$ 的坐标也满足此方程.

因此,当点 P 在直线 l 上运动时,其坐标 $(x,\ y)$ 满足

$$y-3=-2[x-(-1)],$$

即 $2x+y-1=0$. 反过来,以方程

$$2x+y-1=0$$

的解为坐标的点都在直线 l 上.

一般地,设直线 l 经过点 $P_1(x_1,\ y_1)$,斜率为 k,直线 l 上任意一点 P 的坐标是$(x,\ y)$.

当点 $P(x,\ y)$(不同于点 P_1)在直线 l 上运动时,PP_1 的斜率恒等于 k,即

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=k,$$

故

$$y-y_1=k(x-x_1).$$

可以验证:直线 l 上的每个点(包括点 P_1)的坐标都是这个方程的解;反过来,以这个方程的解为坐标的点都在直线 l 上. 这个方程就是过点 P_1,斜率为 k 的直线 l 的方程.

方程

$$y-y_1=k(x-x_1)$$

叫做直线的**点斜式方程**.

当直线 l 与 x 轴垂直时，斜率不存在，其方程不能用点斜式表示. 但因为 l 上每一点的横坐标都等于 x_1，所以它的方程是

$$x = x_1.$$

已知一直线经过点 $P(-2, 3)$，斜率为 2，求这条直线的方程.

由直线的点斜式方程，得

$$y - 3 = 2(x + 2),$$

即

$$2x - y + 7 = 0.$$

已知直线 l 的斜率为 k，与 y 轴的交点是 $P(0, b)$，求直线 l 的方程.

根据直线的点斜式方程，得直线 l 的方程为

$$y - b = k(x - 0),$$

即

$$y = kx + b.$$

我们称 b 为直线 l 在 y 轴上的　　(intercept). 这个方程由直线 l 的斜率和它在 y 轴上的截距确定，所以这个方程也叫做直线的

初中我们学习的一次函数 $y = kx + b$，它的图象是一条直线，其中常数 k 是直线的斜率，常数 b 就是直线在 y 轴上的截距.

在同一直角坐标系中作出直线

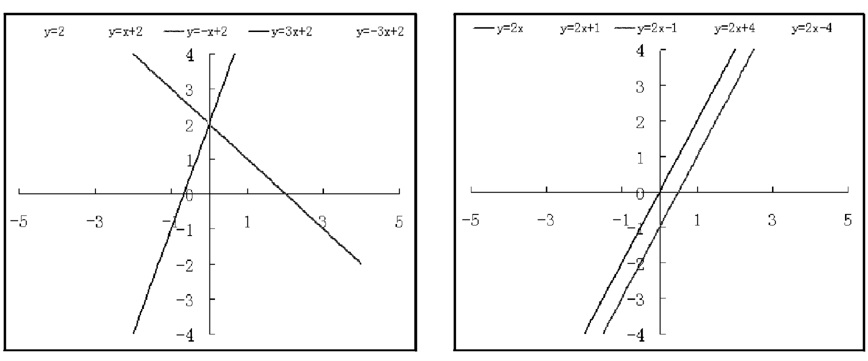
$y = 2$，$y = x + 2$，$y = -x + 2$，$y = 3x + 2$，$y = -3x + 2$，

根据图 4－1－7(1)，你能推测直线 $y = kx + 2$ 有什么特点吗？

在同一直角坐标系中作出直线

$y = 2x$，$y = 2x + 1$，$y = 2x - 1$，$y = 2x + 4$，$y = 2x - 4$，

根据图 4－1－7(2)，你能推测直线 $y = 2x + b$ 有什么特点吗？



(1)　　(2)

1. 根据下列条件，分别写出直线的方程：

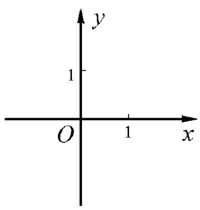
(1) 经过点$(4,\ -2)$，斜率为 3；

(2) 经过点$(3,\ 1)$，斜率为$\frac{1}{2}$；

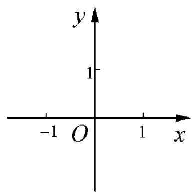
(3) 斜率为-2，在 y 轴上的截距为-2；

(4) 斜率是$\frac{\sqrt{3}}{2}$，与 x 轴交点的横坐标为-7.

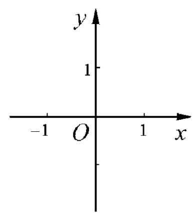
2. 直线 $y=k(x+1)$ $(k>0)$ 的图象可能是(　　).



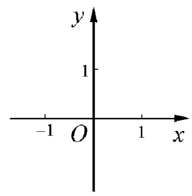
A.



B.



C.



D.

3. 已知一直线经过点 $P(1,\ 2)$，且斜率与直线 $y=-2x+3$ 的斜率相等，则该直线的方程是________________.

4. 任一条直线都可以用点斜式方程表示吗？斜截式方程可以改写成点斜式方程吗？

如果直线 l 经过两点 $P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$ $(x_1\neq x_2)$，则直线 l 的斜率为 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，由直线的点斜式方程得

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

当 $y_2\neq y_1$ 时，方程可以写成

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

这个方程是由直线上两点确定的.

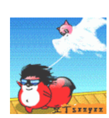
方程

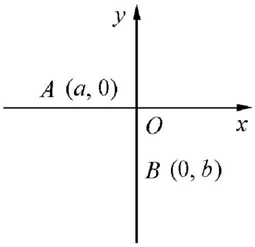
$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

叫做直线的**两点式方程.**

(1) 方程 $\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 的左、右两边各具有怎样的几何意义？它表示什么图形？

(2) 方程$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$和方程$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$表示同一图形吗？





已知直线 l 经过两点 $A(a, 0)$，$B(0, b)$，其中 $ab\neq 0$，求直线 l 的方程(图 4-1-8).

因为直线 l 经过两点 $A(a, 0)$，$B(0, b)$，其中 $ab\neq 0$，由直线的两点式方程得

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a},$$

即

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

其中 b 为直线在 y 轴上的截距，a 也称为直线在 x 轴上的截距. 这个方程由直线在 x 轴和 y 轴上的非零截距所确定，所以这个方程也叫做直线的　　　　.

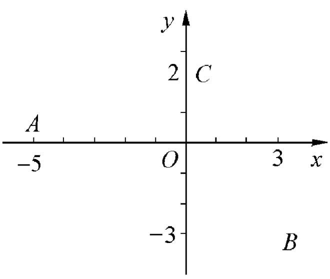
已知三角形的顶点是 $A(-5, 0)$，$B(3, -3)$，$C(0, 2)$(图 4-1-9)，试求这个三角形三边所在直线的方程.

直线 AB 过 $A(-5, 0)$，$B(3, -3)$ 两点，由两点式得

$$\frac{y-0}{-3-0}=\frac{x-(-5)}{3-(-5)},$$

即

$$3x+8y+15=0.$$



这就是直线 AB 的方程.

直线 BC 在 y 轴上的截距为 2，斜率是

$$k=\frac{2-(-3)}{0-3}=-\frac{5}{3},$$

由斜截式得

$$y=-\frac{5}{3}x+2,$$

即

$$5x+3y-6=0.$$

这就是直线 BC 的方程.

直线 AC 在 x 轴、y 轴上的截距分别是 -5，2，由截距式得

$$\frac{x}{-5}+\frac{y}{2}=1,$$

即

$$2x-5y+10=0.$$

这就是直线 AC 的方程.

1. 分别写出经过下列两点的直线方程：

(1) $(1, 3)$，$(-1, 2)$；　　(2) $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$，$\left(-\frac{4}{3}, 2\right)$.

2. 已知两点 $A(3, 2)$，$B(8, 12)$.

(1) 求出直线 AB 的方程；

(2) 若点 $C(-2, a)$在直线 AB 上，求实数 a 的值.

3. 求过点 $M(3, -4)$，且在两条坐标轴上截距相等的直线方程.

4. 回答下列问题：

(1) 任一条直线都有 x 轴上的截距和 y 轴上的截距吗?

(2) 两条直线有相同的斜率，但在 x 轴上的截距不同，那么它们在 y 轴上的截距可能相同吗?

(3) 两条直线在 y 轴上的截距相同，但是斜率不同，那么它们在 x 轴上的截距可能相同吗?

(4) 任一条直线都可以用截距式方程表示吗?

我们已经介绍了直线方程的几种特殊形式，它们都是关于 x 和 y 的二元一次方程，那么，关于 x 和 y 的二元一次方程

$$Ax+By+C=0\ (A,\ B\text{ 不全为 }0)$$

都表示直线吗?

当 $B \neq 0$ 时，方程 $Ax+By+C=0$ 可以写成

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B},$$

它表示斜率为 $-\frac{A}{B}$，在 y 轴上的截距为 $-\frac{C}{B}$ 的直线；特别地，当 $A=0$ 时，它表示垂直于 y 轴的直线.

当 $B=0$ 时，由 $A \neq 0$，方程 $Ax+By+C=0$ 可以写成

$$x=-\frac{C}{A},$$

它表示垂直于 x 轴的直线.

因此，在平面直角坐标系中，任何一个关于 x，y 的二元一次方程 $Ax+By+C=0\ (A,\ B$ 不全为 $0)$都表示一条直线.

方程

$$Ax+By+C=0\ (A,\ B\text{ 不全为 }0) \qquad (*)$$

叫做直线的**一般式方程.**

平面内任意一条直线是否都可以用形如 $Ax+By+C=0\ (A,\ B$ 不全为 $0)$的方程来表示?

求直线

$$l: 3x+5y-15=0$$

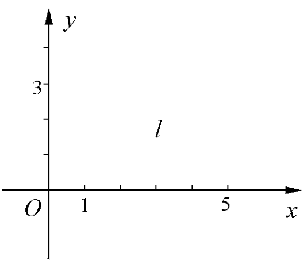
的斜率以及它在 x 轴、y 轴上的截距，并作图.

将直线 l 的方程 $3x+5y-15=0$ 写成

$$y=-\frac{3}{5}x+3,$$

因此，直线 l 的斜率

$$k=-\frac{3}{5}.$$



在方程 $3x+5y-15=0$ 中，当 $x=0$ 时，$y=3$；当 $y=0$ 时，$x=5$. 所以，直线 l 在 y 轴上的截距为 3，在 x 轴上的截距为 5.

画一条直线时，只要找出这条直线上的任意两点就可以了. 通常是找出直线与两个坐标轴的交点. 上面已经求得直线 l 分别与 x 轴、y 轴的交点 $(5, 0)$，$(0, 3)$，过这两点作直线，就得直线 l（图 4－1－10).

设直线 l 的方程为

$$(m^2-2m-3)x+(2m^2+m-1)y-2m+6=0\ (m\neq -1),$$

根据下列条件分别确定 m 的值：

（1）直线 l 在 x 轴上的截距是 -3；

（2）直线 l 的斜率是 1.

（1）令 $y=0$，得

$$x=\frac{2m-6}{m^2-2m-3}.$$

由题意知，

$$\frac{2m-6}{m^2-2m-3}=-3,$$

即

$$\frac{2}{m+1}=-3.$$

解得

$$m=-\frac{5}{3}.$$

（2）由

$$-\frac{m^2-2m-3}{2m^2+m-1}=1,$$

可化为

$$\frac{m-3}{2m-1}=-1,$$

解得

$$m=\frac{4}{3}.$$

1. 如果直线 $3x+2y=6$ 的斜率为 k,在 y 轴上的截距为 b,那么有(　　).

A. $k=-\frac{3}{2}$, $b=3$　　　　B. $k=-\frac{2}{3}$, $b=-3$

C. $k=-\frac{3}{2}$, $b=-3$　　　　D. $k=-\frac{2}{3}$, $b=2$

2. 直线 $5x-2y-10=0$ 在 x 轴上的截距为 a,在 y 轴上的截距为 b,则(　　).

A. $a=2$, $b=5$　　　　B. $a=2$, $b=-5$

C. $a=-2$, $b=5$　　　　D. $a=-2$, $b=-5$

3. 如果 $AC<0$, $BC>0$,那么直线 $Ax+By+C=0$ 不通过(　　).

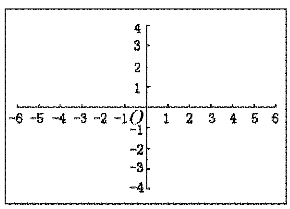
A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

4. 设直线 l 的方程为 $Ax+By+C=0$ (A, B 不同时为0),根据下列条件,求出 A, B, C 应满足的条件:

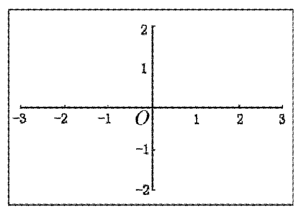
(1) 直线 l 过原点;　　　　(2) 直线 l 垂直于 x 轴;

(3) 直线 l 垂直于 y 轴;　　　　(4) 直线 l 与两条坐标轴都相交.

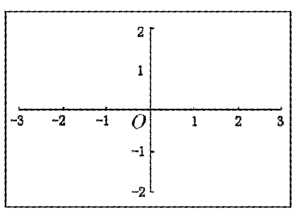
5. 写出下列图中各条直线的方程,并化为一般式:



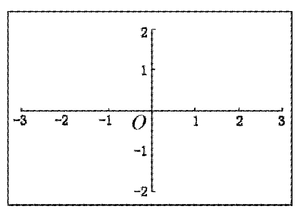
(1)



(2)



(3)



(4)

1. 根据下列条件,写出直线的方程:

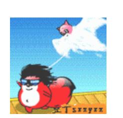
(1) 过点$(3, -2)$,斜率是$\frac{\sqrt{3}}{3}$;

(2) 过点$(-3, 0)$,且与 x 轴垂直;

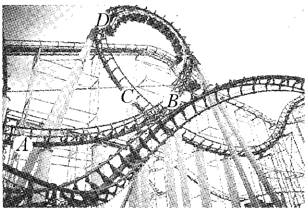
(3) 斜率是 -4,且在 y 轴上的截距为 7;

(4) 经过点$(-1, 8)$, $(4, -2)$.

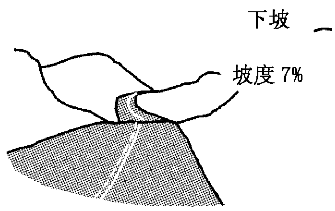
2. 一根弹簧挂 4 kg 的物体时,长 20 cm. 在弹性限度内,所挂物体的质量每增加 1 kg,弹簧伸长 1.5 cm. 试用直线的点斜式方程写出弹簧的长度 l(cm)和所挂物体质量 m(kg)之间的关系.



3. 一根铁棒在 40℃时长 12.506 m,在 80℃时长 12.512 m. 已知长度 l(m)和温度(℃)的关系可以用直线方程来表示,试用直线的两点式方程求出这个方程,并根据这个方程求出这根铁棒在 100℃时的长度.
4. 已知菱形的两条对角线长分别为 8 和 6,试建立适当的直角坐标系,求出菱形各边所在的直线方程.
5. 直线 l 经过点(3, −1),且与两条坐标轴围成一个等腰直角三角形,求直线 l 的方程.
6. 若直线 $(2m^2-5m+2)x-(m^2-4)y+5=0\ (m\neq 2)$ 的斜率为 1,求实数 m 的值.
7. 在直线方程的各种形式中,你喜欢运用哪几种? 通过举例说明你的理由.



8. 如图,估算过山车道 AB, CD 段的斜率.
9. 设直线 l 的方程为 $y-3=k(x+2)$,当 k 取任意实数时,这样的直线应具有什么么共同的特点?
10. "坡度"常用来刻画道路的倾斜程度,这个词与直线的斜率有何关系? 坡度为 4%的道路很陡吗? 调查一些山路或桥面的倾斜度,并与同学交流.



11. (开放题)在平面直角坐标系 xOy 中,等腰三角形 ABC 的顶点 A 的坐标为(1, 1),点 B、点 C 都在坐标轴上.
(1) 举出满足上述条件的△ABC 的例子;
(2) 在解决问题(1)的过程中,你是否发现寻找△ABC 的规律?

我们知道,斜率刻画了直线的倾斜程度,那么,能否用斜率刻画两条直线的位置关系呢?

首先我们研究两条直线平行的情形.

可以猜想:

如果两条直线(斜率存在)平行,那么它们的倾斜程度相同,即斜率相等.

你能证明这个猜想吗?

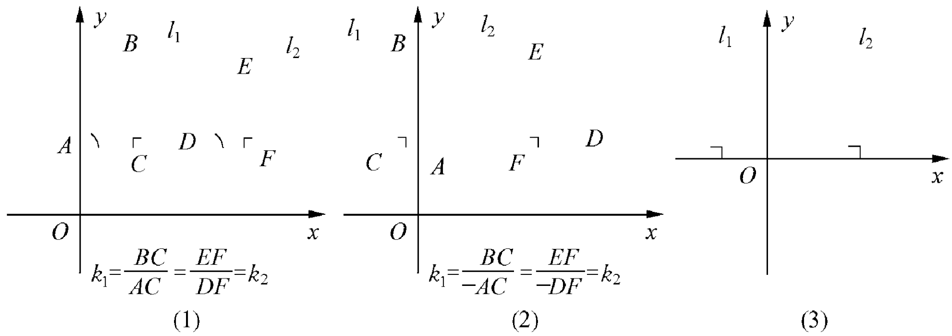
事实上,如图 4-1-11(1),直线 $l_1 /\!/ l_2$,构造两个直角三角形(直角边分别平行于坐标轴),那么△ABC∽△DEF(两角对应相等),于是对应边的比相等,所以它们的斜率 k_1, k_2 相等.

反之,若 $k_1=k_2$,那么 △ABC ∽ △DEF(边对应成比例),于是 $\angle BAC=\angle EDF$,从而 $l_1 /\!/ l_2$.

对于图 4-1-11(2)的情形,结论也成立.

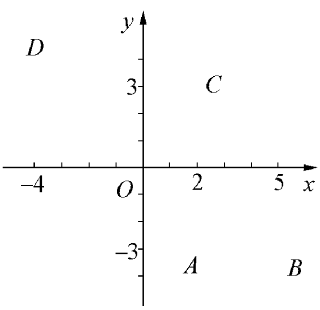
因此,当两条直线的斜率都存在时,如果它们互相平行,那么它

们的斜率相等；反之，如果两条直线的斜率相等，那么它们互相平行.



$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2 \quad (k_1,\ k_2 \text{ 均存在}).$$

如果直线 l_1，l_2 的斜率都不存在，那么它们都与 x 轴垂直，故 $l_1 \parallel l_2$（图 4-1-11(3)）.



求证：顺次连结 $A(2,\ -3)$，$B\left(5,\ -\frac{7}{2}\right)$，$C(2,\ 3)$，$D(-4,\ 4)$四点所得的四边形是梯形（图 4-1-12）.

判断一个四边形是梯形，不仅要判断一组对边平行，还要判断另一组对边不平行.

$$\because\ k_{AB}=\frac{-\frac{7}{2}-(-3)}{5-2}=-\frac{1}{6},\ k_{CD}=\frac{4-3}{-4-2}=-\frac{1}{6},$$

$\therefore\ k_{AB}=k_{CD}$，

从而　$AB \parallel CD$.

$$\text{又}\because\ k_{BC}=\frac{3-\left(-\frac{7}{2}\right)}{2-5}=-\frac{13}{6},\ k_{DA}=\frac{-3-4}{2-(-4)}=-\frac{7}{6},$$

$\therefore\ k_{BC}\neq k_{DA}$，

从而直线 BC 与 DA 不平行.

因此，四边形 $ABCD$ 是梯形.

求过点 $A(2,\ -3)$，且与直线

$$2x+y-5=0$$

平行的直线方程.

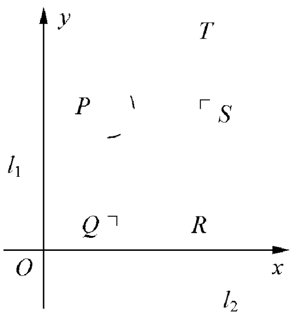
已知直线的斜率是 -2，因为所求直线与已知直线平行，因此它的斜率也是 -2.

根据点斜式,得到所求直线的方程是

$$y+3=-2(x-2),$$

即

$$2x+y-1=0.$$



下面我们研究两条直线垂直的情形.

若 $l_1 \perp l_2$(l_1, l_2 都不与 x 轴垂直),如图 4-1-13,作出两个直角三角形(直角边分别平行于坐标轴). 设 l_1, l_2 的斜率为 k_1, k_2,则

$$\frac{ST}{PS}=k_1, \frac{-PQ}{QR}=k_2.$$

由于 $\mathrm{Rt}\triangle PST \backsim \mathrm{Rt}\triangle PQR$(因为$\angle TPS=\angle RPQ$),故

$$\frac{ST}{PS}=\frac{QR}{PQ},$$

从而

$$k_1=-\frac{1}{k_2},$$

即

$$k_1k_2=-1.$$

反过来,若

$$k_1k_2=-1,$$

可以证明 $l_1 \perp l_2$(习题 4.2 第 9 题).

因此,当两条直线的斜率都存在时,如果它们互相垂直,那么它们斜率的乘积等于-1;反之,如果它们斜率的乘积等于-1,那么它们互相垂直. 即

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1k_2=-1 \quad (k_1, k_2 \text{ 均存在}).$$

如果两条直线 l_1, l_2 中的一条斜率不存在,那么这两条直线什么时候互相垂直? 逆命题成立吗?

(1) 已知四点 $A(5, 3)$, $B(10, 6)$, $C(3, -4)$, $D(-6, 11)$,求证: $AB \perp CD$;

(2) 已知直线 l_1 的斜率 $k_1=\frac{3}{4}$,直线 l_2 经过点 $A(3a, -2)$, $B(0, a^2+1)$,且 $l_1 \perp l_2$,求实数 a 的值.

（1）由斜率公式，得

$$k_{AB}=\frac{6-3}{10-5}=\frac{3}{5},$$

$$k_{CD}=\frac{11-(-4)}{-6-3}=-\frac{5}{3},$$

则有 $k_{AB}\cdot k_{CD}=-1,$

所以 $AB\perp CD.$

（2）由 $l_1\perp l_2,$

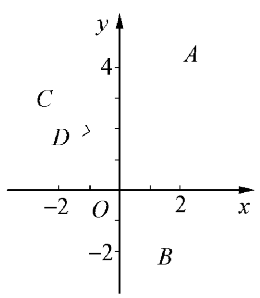
可知

$$k_1\cdot k_2=-1,$$

即 $$\frac{3}{4}\cdot\frac{a^2+1-(-2)}{0-3a}=-1.$$

解得 $a=1$ 或 3.

如图 4-1-14，已知三角形的顶点为 $A(2,\ 4)$，$B(1,\ -2)$，$C(-2,\ 3)$，求 BC 边上的高 AD 所在的直线方程.



直线 BC 的斜率为

$$k_{BC}=\frac{3-(-2)}{-2-1}=-\frac{5}{3}.$$

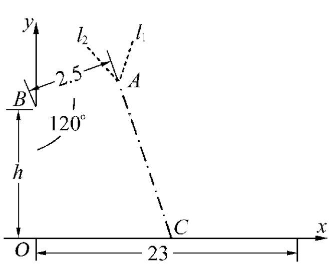
因为 $AD\perp BC$，

所以 $$k_{AD}=-\frac{1}{k_{BC}}=\frac{3}{5}.$$

根据点斜式，得到所求直线的方程是

$$y-4=\frac{3}{5}(x-2),$$

即 $$3x-5y+14=0.$$



在路边安装路灯，路宽 23 m，灯杆长 2.5 m，且与灯柱成 120° 角. 路灯采用锥形灯罩，灯罩轴线与灯杆垂直. 当灯柱高 h 为多少米时，灯罩轴线正好通过道路路面的中线？（精确到 0.01 m）

如图 4-1-15，记灯柱顶端为 B，灯罩顶为 A，灯杆为 AB，灯罩轴线与道路中线交于点 C. 以灯柱底端 O 点为原点，灯柱 OB 为 y 轴，建立如图所示的直角坐标系.

点 B 的坐标为 $(0,\ h)$，点 C 的坐标为 $(11.5,\ 0)$. 因为 $\angle OBA=120°$，所以直线 BA 的倾斜角为 30°，则点 A 的坐标为

$$(2.5\cdot\cos30^\circ,\ h+2.5\cdot\sin30^\circ),$$

即 $$(1.25\sqrt{3},\ h+1.25).$$

因为 $CA\perp BA$，所以

$$k_{CA}=-\frac{1}{k_{BA}}=-\frac{1}{\tan30^\circ}=-\sqrt{3}.$$

由直线的点斜式方程，得 CA 的方程是

$$y-(h+1.25)=-\sqrt{3}(x-1.25\sqrt{3}).$$

因为灯罩轴线 CA 过点 $C(11.5,\ 0)$，故

$$-(h+1.25)=-\sqrt{3}(11.5-1.25\sqrt{3}).$$

解得 $$h\approx14.92(\text{m}).$$

灯柱高约为 14.92 m.

1. 分别判断下列直线 AB 与 CD 是否平行：

(1) $A(3,\ -1)$，$B(-1,\ 1)$；　　$C(-3,\ 5)$，$D(5,\ 1)$；

(2) $A(2,\ -4)$，$B(-\sqrt{3},\ -4)$；　　$C(0,\ 1)$，$D(4,\ 1)$.

2. 已知 $A(-4,\ -2)$，$B(1,\ -1)$，$C(5,\ 5)$，$D\left(-\frac{1}{3},\ \frac{7}{2}\right)$，求证四边形 $ABCD$ 是梯形.

3. 以 $A(-1,\ 1)$，$B(2,\ -1)$，$C(1,\ 4)$为顶点的三角形是(　　).

A. 锐角三角形　　B. 直角三角形　　C. 钝角三角形

4. 求过点 $A(2,\ 3)$，且分别适合下列条件的直线方程：

(1) 平行于直线 $2x+5y-3=0$；

(2) 垂直于直线 $x-y-2=0$.

我们已经知道，任意一条直线都可以用一个二元一次方程来表示，那么，两条直线是否有交点与它们对应的方程所组成的方程组是否有解有何联系？

设两条直线的方程分别是

$$l_1: A_1x+B_1y+C_1=0,\ l_2: A_2x+B_2y+C_2=0.$$

如果这两条直线相交，由于交点同时在这两条直线上，交点的坐标一定是这两个方程的公共解；反之，如果这两个二元一次方程只有一个公共解，那么以这个解为坐标的点必是直线 l_1 和 l_2 的交点.

据此，我们有

方程组 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}$ 的解	一　组	无数组	无　解
两条直线 l_1，l_2 的公共点	一　个	无数个	零　个
直线 l_1，l_2 间的位置关系	相　交	重　合	平　行

分别判断下列直线是否相交，若相交，求出它们的交点：

(1) l_1：$2x-y=7$，l_2：$3x+2y-7=0$；

(2) l_1：$2x-6y+4=0$，l_2：$4x-12y+8=0$；

(3) l_1：$4x+2y+4=0$，l_2：$y=-2x+3$.

(1) 因为方程组

$$\begin{cases}2x-y-7=0,\\3x+2y-7=0\end{cases}$$

的解为

$$\begin{cases}x=3,\\y=-1,\end{cases}$$

因此直线 l_1 和 l_2 相交，交点坐标为$(3,-1)$.

(2) 方程组

$$\begin{cases}2x-6y+4=0,\\4x-12y+8=0\end{cases}$$

有无数组解，这表明直线 l_1 和 l_2 重合.

(3) 方程组

$$\begin{cases}4x+2y+4=0,\\2x+y-3=0\end{cases}$$

无解，这表明直线 l_1 和 l_2 没有公共点，故 $l_1 \parallel l_2$.

直线 l 经过原点，且经过另两条直线

$$2x+3y+8=0,\ x-y-1=0$$

的交点，求直线 l 的方程.

解方程组

$$\begin{cases}2x+3y+8=0,\\x-y-1=0,\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}x=-1,\\y=-2,\end{cases}$$

所以两条直线 $2x+3y+8=0$ 和 $x-y-1=0$ 的交点坐标为$(-1,-2)$.

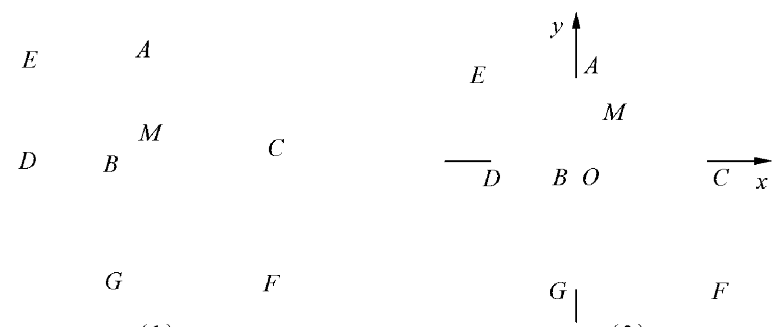
又直线 l 经过原点，所以直线 l 的方程为

$$\frac{y-0}{-2-0}=\frac{x-0}{-1-0},$$

即
$$2x-y=0.$$

如图 4-1-16(1)，以 Rt$\triangle ABC$ 的两条直角边 AB，BC 向形外分别作正方形 $ABDE$ 和正方形 $BCFG$. 连结 EC，AF，两直线交于点 M.

求证：$BM\perp AC$.



(1)　　(2)

建立适当的直角坐标系，将证明 $BM\perp AC$ 转化为计算 $k_{BM}\cdot k_{AC}=-1$，也就是将几何证明转化为代数计算.

如图 4-1-16(2)，以两条直角边所在直线为坐标轴，建立直角坐标系. 设正方形 $ABDE$ 和正方形 $BCFG$ 的边长分别为 a，b，则

$$A(0,\ a),\ C(b,\ 0),\ B(0,\ 0),\ E(-a,\ a),\ F(b,\ -b).$$

直线 AF 的方程是

$$\frac{y+b}{a+b}=\frac{x-b}{0-b},$$

即
$$(a+b)x+by-ab=0.$$

直线 EC 的方程是

$$\frac{y-0}{a-0}=\frac{x-b}{-a-b},$$

即
$$ax+(a+b)y-ab=0.$$

解方程组

$$\begin{cases}(a+b)x+by-ab=0,\\ ax+(a+b)y-ab=0,\end{cases}$$

得
$$\begin{cases} x = \dfrac{a^2 b}{a^2 + ab + b^2}, \\ y = \dfrac{ab^2}{a^2 + ab + b^2}. \end{cases}$$

即 M 点的坐标为

$$\left(\frac{a^2 b}{a^2 + ab + b^2}, \frac{ab^2}{a^2 + ab + b^2}\right),$$

故
$$k_{BM} = \frac{b}{a}.$$

又
$$k_{AC} = \frac{0 - a}{b - 0} = -\frac{a}{b},$$

所以
$$k_{BM} \cdot k_{AC} = -1.$$

因此
$$BM \perp AC.$$

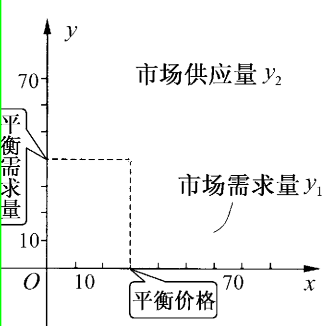
某商品的市场需求量 y_1(万件)、市场供应量 y_2(万件)与市场价格x(元/件)分别近似地满足下列关系：

$$y_1 = -x + 70,\ y_2 = 2x - 20.$$

当$y_1 = y_2$ 时的市场价格称为市场平衡价格,此时的需求量称为平衡需求量.

(1) 求平衡价格和平衡需求量；

(2) 若要使平衡需求量增加 4 万件,政府对每件商品应给予多少元补贴?



如图 4－1－17,市场平衡价格和平衡需求量实际上就是直线 $y = -x + 70$ 与 $y = 2x - 20$ 交点的横坐标和纵坐标,即为方程组 $\begin{cases} y = -x + 70, \\ y = 2x - 20 \end{cases}$ 的解.

(1) 解方程组

$$\begin{cases} y = -x + 70, \\ y = 2x - 20, \end{cases}$$

得
$$\begin{cases} x = 30, \\ y = 40. \end{cases}$$

故平衡价格为30 元 / 件,平衡需求量为 40 万件.

(2) 设政府给予 t 元/件补贴,此时的市场平衡价格(即消费者支付价格)为 x 元/件,则供货者实际每件得到 $(x + t)$ 元.依题意得方程组

$$\begin{cases} -x + 70 = 44, \\ 2(x + t) - 20 = 44, \end{cases}$$

解得　$x=26$，$t=6$.

因此，政府对每件商品应给予 6 元的补贴.

已知直线 l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$ 和 l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$ 相交，那么方程 $(A_1x+B_1y+C_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$（$\lambda$ 为任意实数）表示的直线有什么特点？

1. 下列直线中，与直线 $2x-y-3=0$ 相交的直线是（　　）.

A. $4x-2y-6=0$　　B. $y=2x$

C. $y=2x+5$　　D. $y=-2x+3$

2. 若三条直线 $2x+3y+8=0$，$x-y-1=0$ 和 $x+ky+k+\frac{1}{2}=0$ 相交于一点，则 k 的值等于（　　）.

A. -2　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. 2　　D. $\frac{1}{2}$

3. 若直线 l 经过两条直线 $2x-3y-3=0$ 和 $x+y+2=0$ 的交点，且与直线 $3x+y-1=0$ 平行，求直线 l 的方程.

4. 在例 4 中，求当每件商品征税 3 元时新的平衡价格.

1. 分别求满足下列条件的直线方程：

(1) 经过点 $A(3,2)$，且与直线 $4x+y-2=0$ 平行；

(2) 经过点 $B(3,0)$，且与直线 $2x+y-5=0$ 垂直；

(3) 经过点 $C(2,-3)$，且平行于过两点 $M(1,2)$ 和 $N(-1,-5)$ 的直线.

2. 三角形三个顶点是 $A(4,0)$，$B(6,7)$，$C(0,3)$，求 AB 边上高所在直线的方程.

3. 根据下列条件，求直线方程：

(1) 斜率为 -2，且过两条直线 $3x-y+4=0$ 和 $x+y-4=0$ 的交点；

(2) 过两条直线 $x-2y+3=0$ 和 $x+2y-9=0$ 的交点和原点；

(3) 过两条直线 $2x-2y+10=0$ 和 $3x+4y-2=0$ 的交点，且垂直于直线 $3x-2y+4=0$；

(4) 过两条直线 $2x+y-8=0$ 和 $x-2y+1=0$ 的交点，且平行于直线 $4x-3y-7=0$.

4. 三条直线 $ax+2y+8=0$，$4x+3y=10$ 和 $2x-y=10$ 相交于一点，求 a 的值.

5. 已知 $A(-1,3)$，$B(3,-2)$，$C(6,-1)$，$D(2,4)$，证明：四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

6. 若两条直线 $ax+2ay+1=0$ 和 $(a-1)x-(a+1)y-1=0$ 互相垂直，求垂足的坐标.

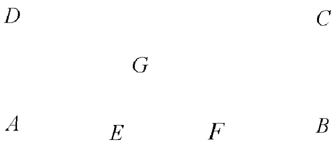
7. 已知两条直线 l_1：$(3+m)x+4y=5-3m$，l_2：$2x+(5+m)y=8$. 当 m 为何值时，l_1 与 l_2：(1) 相交？(2) 平行？(3) 垂直？

8. 若三条直线 $x+y+1=0$，$2x-y+8=0$ 和 $ax+3y-5=0$ 共有三个不同的交点，求 a 满足的条件.

9. 试证明：如果两条直线斜率的乘积等于 -1，那么它们互相垂直.

10. (1) 已知直线 l：$Ax+By+C=0$，若直线 $l \parallel l_1$，证明：直线 l_1 的方程总可以写成 $Ax+By+C_1=0$ ($C_1 \neq C$)；

(2) 已知直线 l：$Ax+By+C=0$，若直线 $l_2 \perp l$，证明：直线 l_2 的方程总可以写成 $Bx-Ay+C_2=0$.



11. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，已知 $AB=3AD$，E，F 为 AB 的两个三等分点，AC，DF 交于点 G，建立适当的直角坐标系，证明：$EG \perp DF$.

12. 直线 l_1 和 l_2 的方程分别是 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2=0$，其中 A_1，B_1 不全为 0，A_2，B_2 也不全为 0. 试探求：

(1) 当 $l_1 \parallel l_2$ 时，直线方程中的系数应满足什么关系？

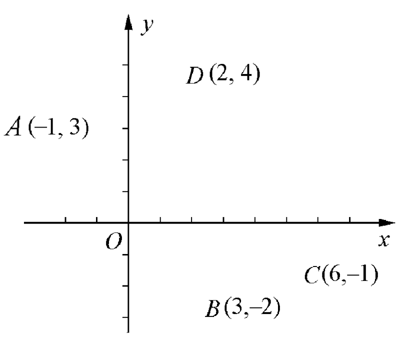
(2) 当 $l_1 \perp l_2$ 时，直线方程中的系数应满足什么关系？

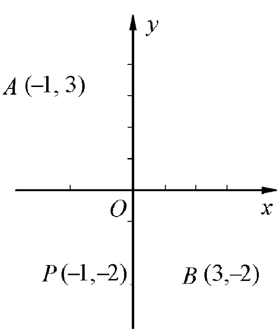
已知 $A(-1,\ 3)$，$B(3,\ -2)$，$C(6,\ -1)$，$D(2,\ 4)$，四边形 $ABCD$ 是否为平行四边形？

除了用对边是否平行的判别方法，还可以通过对边是否相等来判别. 下面我们先计算点 $A(-1,\ 3)$，$B(3,\ -2)$ 间的距离.

如图 4-1-18，过点 A 向 x 轴作垂线，过点 B 向 y 轴作垂线，两条垂线交于点 P，则 P 点的坐标是 $(-1,\ -2)$，且

$$PA=|\,3-(-2)\,|=5,\ PB=|\,3-(-1)\,|=4.$$





所以，在 Rt$\triangle PAB$ 中，

$$AB^2=PA^2+PB^2=5^2+4^2=41.$$

因此，A，B 间的距离

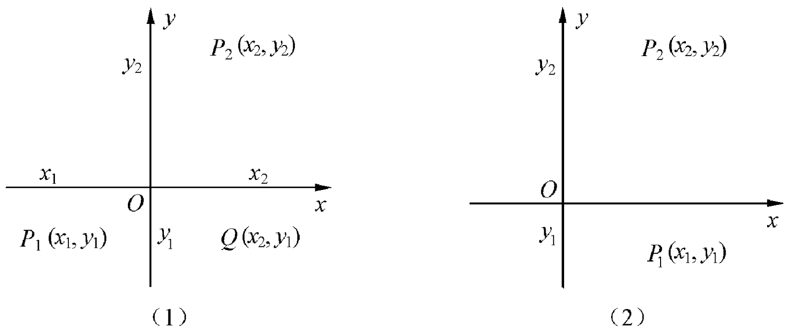
$$AB=\sqrt{41}.$$

类似可得 $CD=\sqrt{41}$，所以 $AB=CD$. 同理有 $BC=DA$，故四边形

$ABCD$ 为平行四边形.

一般地,已知两点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$,求 P_1, P_2 两点间的距离.

如果 $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$,过 P_1, P_2 分别向 y 轴、x 轴作垂线,两条垂线交于点 Q(图 4-1-19(1)),则点 Q 的坐标为(x_2, y_1).



因为 $P_1Q = |x_2 - x_1|$, $P_2Q = |y_2 - y_1|$,

所以,在$\text{Rt}\triangle P_1P_2Q$ 中,

$$P_1P_2^2 = P_1Q^2 + P_2Q^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2. \quad (*)$$

如果 $x_1 = x_2$(图 4-1-19(2)),那么

$$P_1P_2 = |y_2 - y_1|,$$

$(*)$式也成立.

如果 $y_1 = y_2$,那么

$$P_1P_2 = |x_2 - x_1|,$$

$(*)$式仍成立.

由此我们得到平面上 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$两点间的距离公式

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

(1) 求 $A(-1, 3)$, $B(2, 5)$两点间的距离;

(2) 已知 $A(0, 10)$, $B(a, -5)$两点间的距离是 17,求实数 a 的值.

(1) 由两点间距离公式得

$$AB = \sqrt{[2-(-1)]^2 + (5-3)^2} = \sqrt{13}.$$

（2）由两点间距离公式得

$$\sqrt{(a-0)^2+(-5-10)^2}=17,$$

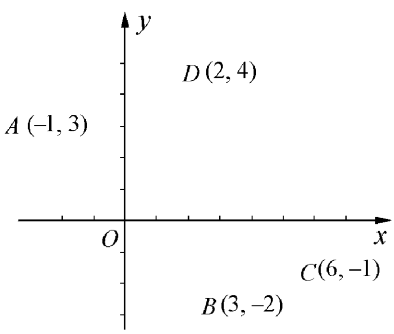
解得 $$a=\pm 8.$$

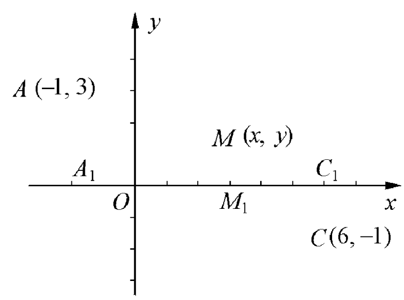
故所求实数 a 的值为 8 或 -8.

现在，我们再来考察本小节开头的问题. 由于两条对角线互相平分的四边形是平行四边形，所以，只需说明对角线 AC 和 BD 的中点相同，即可推得四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

怎样求线段 AC 中点的坐标呢?

设线段 AC 的中点 M 的坐标为 (x, y)，过点 A, M, C 向 x 轴作垂线，垂足分别为 A_1, M_1, C_1，则 A_1, M_1, C_1 的横坐标分别为 -1, x, 6（图 4-1-20）.





由 $A_1M_1=M_1C_1$，得 $x-(-1)=6-x$，解得

$$x=\frac{-1+6}{2}=\frac{5}{2}.$$

同理可得

$$y=\frac{3+(-1)}{2}=1.$$

所以线段 AC 的中点 M 的坐标为 $\left(\frac{5}{2}, 1\right)$.

同理可得线段 BD 的中点坐标也为 $\left(\frac{5}{2}, 1\right)$，因此四边形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 在 M 点互相平分，故这个四边形为平行四边形.

一般地，对于平面上的两点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$，线段 P_1P_2 的中点是 $M(x_0, y_0)$，则

$$\begin{cases} x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}, \\ y_0=\dfrac{y_1+y_2}{2}. \end{cases}$$

这个中点坐标公式可仿上加以证明. 下面我们仅就 $x_1 \neq x_2$ 的情况,再用距离公式及斜率公式来证明.

证明点 M 在直线 P_1P_2 上.

因为
$$k_{MP_1}=\frac{y_1-\frac{y_1+y_2}{2}}{x_1-\frac{x_1+x_2}{2}}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2},$$

$$k_{MP_2}=\frac{y_2-\frac{y_1+y_2}{2}}{x_2-\frac{x_1+x_2}{2}}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

因此
$$k_{MP_1}=k_{MP_2},$$
所以三点 P_1, M, P_2 在同一直线上.

证明 $MP_1=MP_2$.

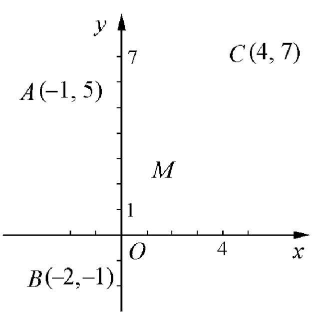
因为
$$MP_1=\sqrt{\left(x_1-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(y_1-\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1-y_2}{2}\right)^2},$$

$$MP_2=\sqrt{\left(x_2-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(y_2-\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^2+\left(\frac{y_2-y_1}{2}\right)^2},$$

因此 $\quad MP_1=MP_2$.

所以点 M 为 P_1P_2 的中点.

已知△ABC 的顶点坐标为 $A(-1,5)$, $B(-2,-1)$, $C(4,7)$,求 BC 边上的中线 AM 的长和 AM 所在的直线方程.



如图 4-1-21,设点 M 的坐标为(x, y). 因为点 M 是线段 BC 的中点,所以

$$x=\frac{-2+4}{2}=1,\ y=\frac{-1+7}{2}=3,$$

即 M 点的坐标为$(1, 3)$.

由两点间的距离公式得

$$AM=\sqrt{[1-(-1)]^2+(3-5)^2}=2\sqrt{2}.$$

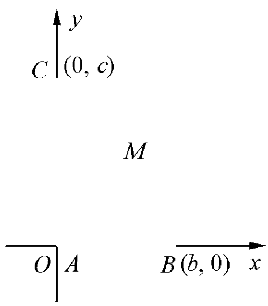
因此，BC 边上的中线 AM 的长为 $2\sqrt{2}$.

由两点式得中线 AM 所在的直线方程为

$$\frac{y-3}{5-3}=\frac{x-1}{-1-1},$$

即
$$x+y-4=0.$$

已知$\triangle ABC$是直角三角形，斜边 BC 的中点为 M，建立适当的直角坐标系，证明：$AM=\frac{1}{2}BC$.



如图 4－1－22，以 Rt$\triangle ABC$ 的直角边 AB，AC 所在直线为坐标轴，建立直角坐标系，设 B，C 两点的坐标分别为$(b,\ 0)$，$(0,\ c)$.

因为点 M 是 BC 的中点，故点 M 的坐标为$\left(\frac{0+b}{2},\ \frac{0+c}{2}\right)$，即$\left(\frac{b}{2},\ \frac{c}{2}\right)$. 由两点间距离公式得

$$BC=\sqrt{(0-b)^2+(c-0)^2}=\sqrt{b^2+c^2},$$

$$AM=\sqrt{\left(\frac{b}{2}-0\right)^2+\left(\frac{c}{2}-0\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2}.$$

所以 $AM=\frac{1}{2}BC$.

已知平面上 A，B，C 三点的坐标，如何判断这三点能否构成三角形？

1. 求线段 AB 的长及其中点的坐标：

   (1) $A(8,\ 10)$，$B(-4,\ 4)$；　　(2) $A(-\sqrt{3},\ \sqrt{2})$，$B(-\sqrt{2},\ \sqrt{3})$.

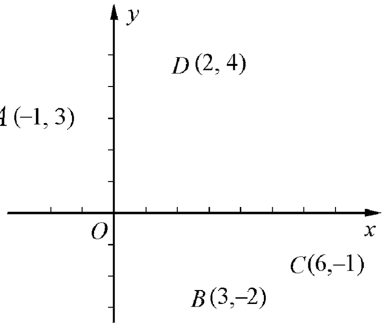
2. 已知$\triangle ABC$的顶点坐标为 $A(3,\ 2)$，$B(1,\ 0)$，$C(2+\sqrt{3},\ 1-\sqrt{3})$，求 AB 边上的中线 CM 的长.

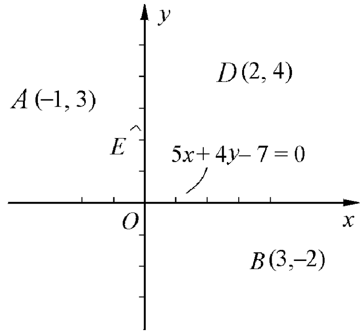
3. 已知两点 $P(1,\ -4)$，$A(3,\ 2)$，求点 A 关于点 P 的对称点 B 的坐标.

我们已经证明图 4－1－23 中的四边形 $ABCD$ 为平行四边形，如何计算它的面积呢？

用两点间的距离公式可求得 $AB=\sqrt{41}$，因此，只要知道 AB 边上的高，即点 D（或点 C）到直线 AB 的距离，就能算出这个平行四边形的面积.

如何计算点 $D(2,\ 4)$到直线 AB：$5x+4y-7=0$ 的距离呢？





过点 D 作 $DE\perp AB$，垂足为 E，则点 D 到直线 AB 的距离就是线段 DE 的长(图 4-1-23).

通过求点 E 的坐标，用两点间距离公式求 DE.

由 DE 垂直 AB，可知 DE 所在直线的斜率为 $\frac{4}{5}$；

写出 DE 所在直线的方程：$y-4=\frac{4}{5}(x-2)$，即 $4x-5y+12=0$；

解由 AB 和 DE 所在的直线方程联立的方程组 $\begin{cases}5x+4y-7=0,\\4x-5y+12=0,\end{cases}$ 得垂足 E 的坐标$\left(-\frac{13}{41},\ \frac{88}{41}\right)$；

利用两点间的距离公式，求出点 D 到直线 AB 的距离

$$DE=\sqrt{\left(-\frac{13}{41}-2\right)^2+\left(\frac{88}{41}-4\right)^2}=\frac{19}{\sqrt{41}}.$$

这一方法运算量较大，下面我们通过构造三角形，利用面积关系求出点 D 到直线 AB 的距离.

如图 4-1-24，过点 D 分别作 x 轴、y 轴的平行线，交直线 AB 于点 M，N. 我们通过计算 $\mathrm{Rt}\triangle DMN$ 的面积，求出 DE.

求出 $M\left(-\frac{9}{5},\ 4\right)$，$N\left(2,\ -\frac{3}{4}\right)$；

计算

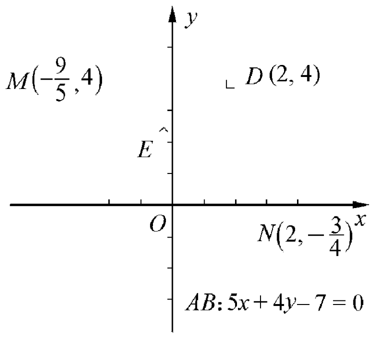
$$DM=\left|-\frac{9}{5}-2\right|=\frac{19}{5},\ DN=\left|-\frac{3}{4}-4\right|=\frac{19}{4};$$

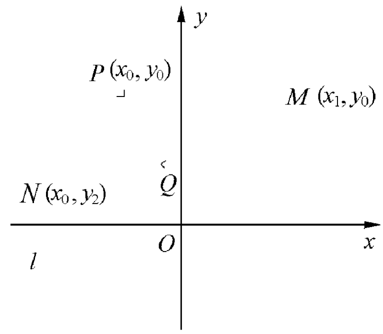
根据三角形面积公式得到

$$DE=\frac{DM\cdot DN}{MN}=\frac{\frac{19}{5}\cdot\frac{19}{4}}{\sqrt{\left(\frac{19}{5}\right)^2+\left(\frac{19}{4}\right)^2}}=\frac{19}{\sqrt{41}}.$$

于是我们求得平行四边形 $ABCD$ 的面积为

$$AB \cdot DE = \sqrt{41} \cdot \frac{19}{\sqrt{41}} = 19.$$





一般地，对于直线

$$l: Ax + By + C = 0 (A \neq 0, B \neq 0)$$

外一点 $P(x_0, y_0)$，过点 P 作 $PQ \perp l$，垂足为 Q. 过点 P 分别作 x 轴、y 轴的平行线，交 l 于点 $M(x_1, y_0)$，$N(x_0, y_2)$（图 4－1－25）.

由

$$Ax_1 + By_0 + C = 0, Ax_0 + By_2 + C = 0,$$

得

$$x_1 = \frac{-By_0 - C}{A}, y_2 = \frac{-Ax_0 - C}{B}.$$

所以

$$PM = |x_1 - x_0| = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{A}\right|,$$

$$PN = |y_2 - y_0| = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{B}\right|.$$

PQ 是 Rt$\triangle PMN$ 斜边上的高，由三角形面积公式可知

$$PQ = \frac{PM \cdot PN}{MN} = \frac{PM \cdot PN}{\sqrt{PM^2 + PN^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

由此我们得到，点 $P(x_0, y_0)$ 到直线

$$l: Ax + By + C = 0$$

的距离为

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

你还能通过其他途径求出点 P 到直线 l 的距离吗？

求点 $P(-1, 2)$到下列直线的距离：

(1) $2x+y-10=0$；　　(2) $3x=2$.

(1) 根据点到直线的距离公式，得

$$d=\frac{|2\times(-1)+2-10|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}.$$

(2) 因为直线 $3x=2$ 平行于 y 轴，所以

$$d=\left|\frac{2}{3}-(-1)\right|=\frac{5}{3}.$$

求两条平行直线 $x+3y-4=0$ 与 $2x+6y-9=0$ 之间的距离.

在两条平行直线中的一条直线上任取一点，将平行直线之间的距离转化为点到直线的距离 .

在直线 $x+3y-4=0$ 上取点 $P(4, 0)$，那么点 $P(4, 0)$ 到直线 $2x+6y-9=0$ 的距离 d 就是两条平行直线之间的距离.

因此，两条平行线之间的距离为

$$d=\frac{|2\times 4+6\times 0-9|}{\sqrt{2^2+6^2}}=\frac{1}{\sqrt{40}}=\frac{\sqrt{10}}{20}.$$

一般地，已知两条平行直线

l_1：$Ax+By+C_1=0$，l_2：$Ax+By+C_2=0(C_1\neq C_2)$.

设 $P_0(x_0, y_0)$是直线 l_2 上任意一点，则

$$Ax_0+By_0+C_2=0,$$

即

$$Ax_0+By_0=-C_2.$$

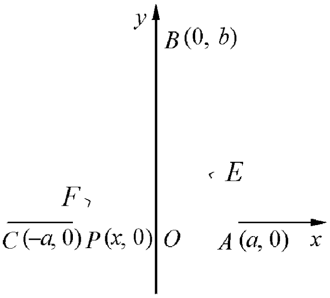
于是点 $P_0(x_0, y_0)$到直线 l_1：$Ax+By+C_1=0$ 的距离

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

就是平行直线 l_1 和 l_2 之间的距离.

建立适当的直角坐标系，证明：等腰三角形底边上任意一点到两腰的距离之和等于一腰上的高.

设△ABC 是等腰三角形，以底边 CA 所在直线为 x 轴，过顶点 B 且垂直于CA 的直线为 y 轴，建立直角坐标系(图 4－1－26).



设 $A(a, 0)$，$B(0, b)(a>0, b>0)$，则 $C(-a, 0)$.

直线 AB 的方程：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$，

即
$$bx+ay-ab=0.$$

直线 BC 的方程：$\dfrac{x}{-a}+\dfrac{y}{b}=1$，

即
$$bx-ay+ab=0.$$

设底边 AC 上任意一点为 $P(x, 0)(-a \leqslant x \leqslant a)$，则

P 到 AB 的距离
$$PE=\frac{|bx-ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b(a-x)}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

P 到 BC 的距离
$$PF=\frac{|bx+ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b(a+x)}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

A 到 BC 的距离
$$h=\frac{|ba+ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

所以
$$PE+PF=\frac{b(a-x)}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b(a+x)}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=h.$$

故原命题得证.

1. (1) 求点 $P(3, -2)$ 到直线 $3x+4y-25=0$ 的距离；

(2) 求点 $P(-2, 1)$ 到直线 $3y+5=0$ 的距离.

2. 求下列两条平行直线之间的距离：

(1) $5x-12y-2=0$ 与 $5x-12y+15=0$；

(2) $6x-4y+5=0$ 与 $y=\dfrac{3}{2}x$.

3. 已知直线 l 经过点$(-2, 3)$，且原点到直线 l 的距离是 2，求直线 l 的方程.

4. 已知光线通过点 $A(-2, 3)$，经 x 轴反射，其反射光线通过点 $B(5, 7)$，求入射光线和反射光线所在直线的方程.

1. 设点 A 在 x 轴上，点 B 在 y 轴上，线段 AB 的中点 M 的坐标是$(2, -1)$，求线段 AB 的长度.

2. 已知点 $P(-1, 2)$，分别求点 P 关于原点、x 轴和 y 轴的对称点的坐标.

3. 已知两点 $A(2, 3)$，$B(-1, 4)$，点 $P(x, y)$到点 A，B 的距离相等，求实数 x，y 满足的条件.

4. 若点 $P(x, y)$ 在直线 $x+y-4=0$ 上，O 是原点，求 OP 的最小值.

5. 直线 l 到两条平行直线 $2x-y+2=0$ 和 $2x-y+4=0$ 的距离相等，求直线 l 的方程.

6. 直线 l 在 y 轴上截距为 10，且原点到直线 l 的距离是 8，求直线 l 的方程.

7. 点 P 在直线 $3x+y-5=0$ 上，且点 P 到直线 $x-y-1=0$ 的距离等于 $\sqrt{2}$，求点 P 的坐标.

8. 若 $A(7,\ 8)$，$B(10,\ 4)$，$C(2,\ -4)$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

9. 已知光线通过点 $A(2,\ 3)$，经直线 $x+y+1=0$ 反射，其反射光线通过点 $B(1,\ 1)$，求入射光线和反射光线所在直线的方程.

10. 过点 $P(3,\ 0)$ 作直线 l，使它被两条相交直线 $2x-y-2=0$ 和 $x+y+3=0$ 所截得的线段恰好被 P 点平分，求直线 l 的方程.

11. 在直线 $x+2y=0$ 上求一点 P，使它到原点的距离与到直线 $x+2y-3=0$ 的距离相等.

12. 已知 $M(-1,\ 3)$，$N(6,\ 2)$，点 P 在 x 轴上，且使 $PM+PN$ 取最小值，求点 P 的坐标.

13. 已知直线 l：$y=3x+3$，求：

(1) 直线 l 关于点 $M(3,\ 2)$ 对称的直线的方程；

(2) 直线 $x-y-2=0$ 关于 l 对称的直线的方程.

14. 已知 $\triangle ABC$ 的一条内角平分线 CD 的方程为 $2x+y-1=0$，两个顶点为 $A(1,\ 2)$，$B(-1,\ -1)$，求第三个顶点 C 的坐标.

15. 直线 l_1 经过点 $(3,\ 0)$，直线 l_2 经过点 $(0,\ 4)$，且 $l_1 /\!/ l_2$，d 表示 l_1 和 l_2 之间的距离，那么 d 在怎样的范围内变化？

16. 给出代数式 $\sqrt{(x+1)^2+1}+\sqrt{(x-3)^2+4}$ 的几何意义，并探求它的最小值.

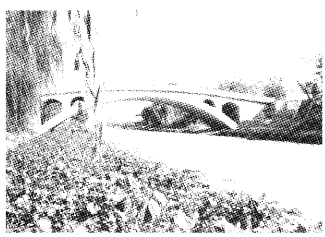
圆与方程

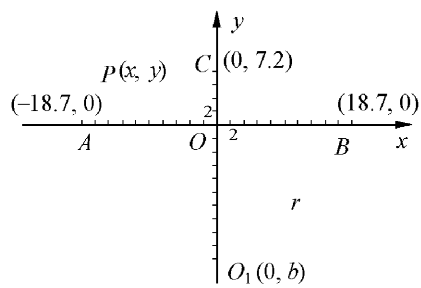
圆是最完美的曲线.它是平面内到定点的距离等于定长的点的集合.定点就是圆心,定长就是半径.

如何建立圆的方程?

如何利用圆的方程研究圆的性质?

河北省赵县的赵州桥,是世界上历史最悠久的石拱桥.赵州桥的跨度约为 37.4 m,圆拱高约为 7.2 m,如何写出这个圆拱所在的圆的方程?


赵州桥



要求圆的方程,需建立适当的直角坐标系,并求出圆上任意一点 $P(x, y)$ 所满足的关系式.

以圆拱所对的弦所在的直线为 x 轴,弦的垂直平分线为 y 轴建立直角坐标系(图 4-2-1).根据平面几何知识知道,圆拱所在圆的圆心 O_1 必在 y 轴上,故可设 $O_1(0, b)$.

设圆拱所在圆的半径为 r,那么圆上任意一点 $P(x, y)$ 应满足 $O_1P=r$,得

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-b)^2}=r,$$

即

$$(x-0)^2+(y-b)^2=r^2. \tag{*}$$

因此,只需确定 b 和 r 的值,就能写出圆的方程.

将点 $B(18.7, 0)$,$C(0, 7.2)$ 分别代入(*),得

$$\begin{cases}(18.7-0)^2+(0-b)^2=r^2, \\ (0-0)^2+(7.2-b)^2=r^2,\end{cases}$$

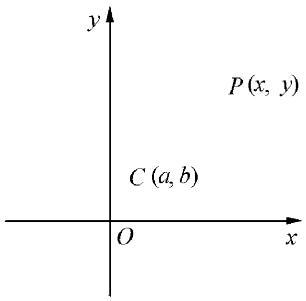
解得

$$b\approx 20.7,\ r\approx 27.9.$$

故赵州桥圆拱所在的圆的方程为

$$x^2+(y-20.7)^2=27.9^2.$$

一般地，设点 $P(x, y)$ 是以 $C(a, b)$ 为圆心，r 为半径的圆上的任意一点(图 4-2-2)，则 $CP=r$. 由两点间的距离公式得



$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r,$$

即

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \qquad (1)$$

反过来，若点 P_1 的坐标 (x_1, y_1) 是方程(1)的解，则

$$(x_1-a)^2+(y_1-b)^2=r^2,$$

即有

$$\sqrt{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2}=r.$$

这说明点 $P_1(x_1, y_1)$ 在以 $C(a, b)$ 为圆心，r 为半径的圆上.

方程

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$$

叫做以 (a, b) 为圆心，r 为半径的**圆的标准方程.**

特别地，当圆心为原点 $O(0, 0)$ 时，圆的方程为

$$x^2+y^2=r^2.$$

求圆心是 $C(2, -3)$，且经过原点的圆的方程.

因为圆 C 经过坐标原点，所以圆 C 的半径是

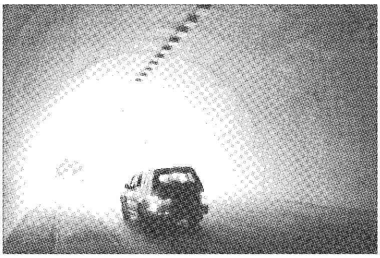
$$r=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}.$$

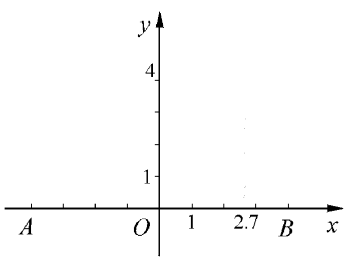
因此，所求圆的方程是

$$(x-2)^2+(y+3)^2=13.$$

已知隧道的截面是半径为 4 m 的半圆，车辆只能在道路中心线一侧行驶，一辆宽为 2.7 m，高为 3 m 的货车能不能驶入这个隧道?

以某一截面半圆的圆心为坐标原点，半圆的直径 AB 所在的直线为 x 轴，建立直角坐标系(图 4-2-3)，那么半圆的方程为





$$x^2+y^2=16(y\geqslant 0).$$

将 $x=2.7$ 代入，得

$$y=\sqrt{16-2.7^2}=\sqrt{8.71}<3.$$

即在离中心线 2.7 m 处，隧道的高度低于货车的高度. 因此，货车不能驶入这个隧道.

假设货车的最大宽度为 a m，那么货车要驶入该隧道，限高为多少？

将圆的标准方程

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

展开，得

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0.$$

由此可见，圆的方程具有如下形式：

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0, \tag{2}$$

其中 D, E, F 为常数.

那么，形如(2)的方程是否都表示圆呢？

将方程

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

配方，得

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(D^2+E^2-4F). \tag{3}$$

与圆的标准方程比较，可知：

(1) 当

$$D^2+E^2-4F>0$$

时，方程(2) 表示以 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ 为圆心，$\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ 为半径的圆；

(2) 当

$$D^2+E^2-4F=0$$

时，方程(2)只有一解，表示一个点 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$；

(3) 当

$$D^2+E^2-4F<0$$

时，方程(2)无实数解，不表示任何图形.

方程

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0\ (D^2+E^2-4F>0)$$

叫做**圆的一般方程.**

已知$\triangle ABC$顶点的坐标为$A(4,\ 3)$，$B(5,\ 2)$，$C(1,\ 0)$，求$\triangle ABC$外接圆的方程.

设所求圆的方程为

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$$

因为点A，B，C在所求的圆上，故有

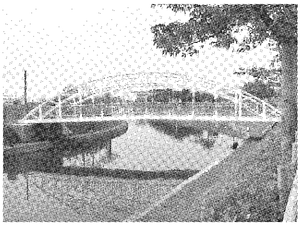
$$\begin{cases}4D+3E+F+25=0,\\5D+2E+F+29=0,\\D+F+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}D=-6,\\E=-2,\\F=5.\end{cases}$$

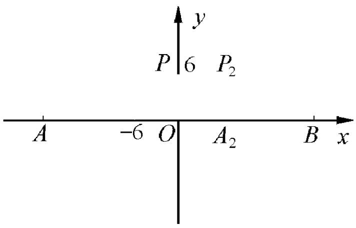
故所求圆的方程是

$$x^2+y^2-6x-2y+5=0.$$

本题能否利用圆的标准方程求解？还有其他解法吗？

某圆拱梁的示意图如图 4－2－4 所示. 该圆拱的跨度AB是 36 m，拱高OP是 6 m，在建造时，每隔 3 m 需用一个支柱支撑，求支柱A_2P_2的长(精确到 0.01 m).





以线段AB所在的直线为x轴，线段AB的中点O为坐标原点建立直角坐标系，那么点A，B，P的坐标分别为$(-18,\ 0)$，$(18,\ 0)$，$(0,\ 6)$.

设圆拱所在的圆的方程是

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$$

因为点 A，B，P 在所求的圆上，故有

$$\begin{cases}18^2+18D+F=0,\\18^2-18D+F=0,\\6^2+6E+F=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}D=0,\\E=48,\\F=-324.\end{cases}$$

故圆拱所在的圆的方程是

$$x^2+y^2+48y-324=0.$$

将 P_2 点的横坐标 $x=6$ 代入上式，解得

$$y=-24+12\sqrt{6}\approx 5.39(\text{负值舍去}).$$

支柱 A_2P_2 的长约为 5.39 m.

1. 写出下列各圆的方程：

(1) 圆心在原点，半径为 6；

(2) 经过点(6，3)，圆心为(2，−2).

2. 求以点 $C(-1，-5)$为圆心，并且和 y 轴相切的圆的方程.

3. 已知点 $A(-4，-5)$，$B(6，-1)$，求以线段 AB 为直径的圆的方程.

4. 下列方程各表示什么图形？若表示圆，求其圆心和半径：

(1) $x^2+y^2-4x=0$；

(2) $x^2+y^2-4x-2y+5=0$.

5. 求经过点 $A(4，1)$，$B(-6，3)$，$C(3，0)$的圆的方程.

6. 如果方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ $(D^2+E^2-4F>0)$ 所表示的曲线关于直线 $y=x$ 对称，那么必有（　　）.

A. $D=E$　　B. $D=F$　　C. $E=F$　　D. $D=E=F$

1. 求满足下列条件的圆的方程：

(1) 过点(−2，2)，圆心是(3，0)；

(2) 圆心在直线 $2x-3y+5=0$ 上，且与两坐标轴均相切；

(3) 经过两点(3，5)和(−3，7)，且圆心在 x 轴上.

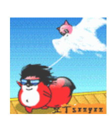
2. 已知圆的内接正方形相对的两个顶点的坐标分别是(5，6)，(3，−4)，求这个圆的方程.

3. 已知圆过点 $P(-4，3)$，圆心在直线 $2x-y+1=0$ 上，且半径为 5，求这个圆的方程.

4. 求经过三点(−1，5)，(5，5)，(6，−2)的圆的方程.

5. 若圆 $x^2+y^2+4x+2by+b^2=0$ 与 x 轴相切，求 b 的值.

6. 求过两点 $A(0，4)$，$B(4，6)$，且圆心在直线 $x-2y-2=0$ 上的圆的标准方程.



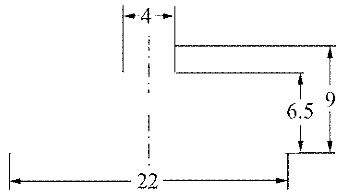
7. 若点$(1, 1)$在圆$(x-a)^2+(y+a)^2=4$的内部，求实数a的取值范围.

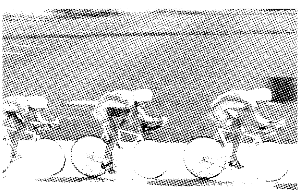
8. 画出方程$x-1=\sqrt{1-y^2}$表示的曲线.

9. 求圆$x^2+y^2+2x-2y+1=0$关于直线$x-y+3=0$对称的圆的方程.

10. 已知点$M(x, y)$与两个定点$O(0, 0)$，$A(3, 0)$的距离之比为$\frac{1}{2}$，那么点M的坐标应满足什么关系？

11. 河道上有一座圆拱桥，在正常水位时，拱圈最高点距水面为9 m，拱圈内水面宽 22 m. 一条船在水面以上部分高 6.5 m，船顶部宽4 m，故通行无阻. 近日水位暴涨了 2.7 m，为此，必须加重船载，降低船身，才能通过桥洞. 试问：船身应该降低多少？





我们知道，圆心到直线的距离d与圆的半径r之间的大小关系决定了直线与圆的位置关系.

在平面直角坐标系中，怎样根据方程来判断直线与圆的位置关系呢?

设直线l和圆C的方程分别为：

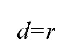
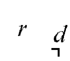
$$Ax+By+C=0,\ x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$$

如果直线l与圆C有公共点，由于公共点同时在l和C上，所以公共点的坐标一定是这两个方程的公共解；反之，如果这两个方程有公共解，那么以公共解为坐标的点必是l与C的公共点 .

由l与C的方程联立方程组

$$\begin{cases}Ax+By+C=0,\\ x^2+y^2+Dx+Ey+F=0,\end{cases}$$

我们有如下结论：

相　　离	相　　切	相　　交
$d>r$	$d=r$	$d<r$
方程组无解	方程组仅有一组解	方程组有两组不同的解
		

求直线 $4x+3y=40$ 和圆 $x^2+y^2=100$ 的公共点坐标，并判断它们的位置关系.

直线 $4x+3y=40$ 和圆 $x^2+y^2=100$ 的公共点坐标就是方程组

$$\begin{cases}4x+3y=40,\\ x^2+y^2=100\end{cases}$$

的解.

解这个方程组，得

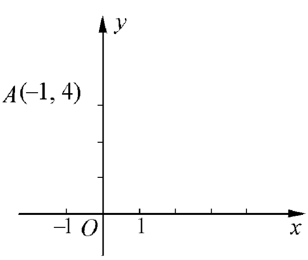
$$\begin{cases}x_1=10,\\ y_1=0,\end{cases}\quad \begin{cases}x_2=\dfrac{14}{5},\\ y_2=\dfrac{48}{5}.\end{cases}$$

所以公共点坐标为 $(10,\ 0)$，$\left(\dfrac{14}{5},\ \dfrac{48}{5}\right)$.

直线 $4x+3y=40$ 和圆 $x^2+y^2=100$ 有两个公共点，所以直线和圆相交.

自点 $A(-1,\ 4)$ 作圆 $(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 的切线 l，求切线 l 的方程.

易知，当直线 l 垂直于 x 轴时，不满足条件.



当直线 l 不垂直于 x 轴时，可设直线 l 的方程为

$$y-4=k(x+1),$$

即

$$kx-y+(k+4)=0.$$

如图 4-2-5，由直线与圆相切，得圆心 $(2,\ 3)$ 到直线 l 的距离等于圆半径，故

$$\frac{|2k-3+(k+4)|}{\sqrt{k^2+1}}=1.$$

解得

$$k=0 \text{ 或 } k=-\frac{3}{4}.$$

因此，所求直线 l 的方程是 $y=4$ 或 $3x+4y-13=0$.

易知，当直线 l 垂直于 x 轴时，不满足条件.

当直线 l 不垂直于 x 轴时，可设直线 l 的方程为

$$y-4=k(x+1).$$

由于直线 l 与圆相切，所以方程组

$$\begin{cases}y-4=k(x+1),\\ (x-2)^2+(y-3)^2=1\end{cases}$$

仅有一组解.

由方程组消去 y，得关于 x 的一元二次方程

$$(1+k^2)x^2+(2k^2+2k-4)x+k^2+2k+4=0.$$

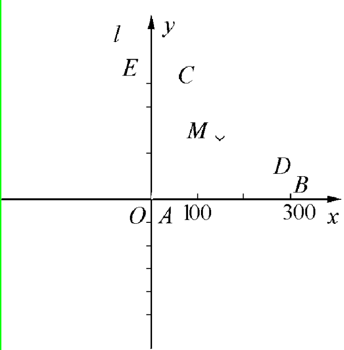
由其判别式

$$\Delta=(2k^2+2k-4)^2-4(1+k^2)(k^2+2k+4)=0,$$

解得

$$k=0 \text{ 或 } k=-\frac{3}{4}.$$

因此，所求直线 l 的方程是 $y=4$ 或 $3x+4y-13=0$.



据气象台预报：在 A 市正东方向 300 km 的 B 处有一台风中心形成，并以 40 km/h 的速度向西北方向移动，在距台风中心250 km 以内的地区将受其影响. 从现在起经过多长时间，台风将影响 A 市？持续时间多长？（精确到 0.1 h）

以 A 为圆心、250 km 为半径作⊙A. 当台风中心移动经过的直线 l 与⊙A 相交或相切时，A 市将受到台风影响.

建立如图 4-2-6 所示的直角坐标系，那么点 A，B 的坐标分别为(0，0)，(300，0)，⊙A 的方程为 $x^2+y^2=250^2$，直线 l 的方程为 $y=-(x-300)$，即 $x+y-300=0$.

因为点 O 到直线 l 的距离

$$OM=\frac{|0+0-300|}{\sqrt{1^2+1^2}}=150\sqrt{2}<250,$$

所以直线 l 与圆相交 .

设交点为 C，D，则

$$CD=2DM=2\sqrt{250^2-(150\sqrt{2})^2}=100\sqrt{7}.$$

又 $$BM=OM,$$

故 $BD=BM-DM=150\sqrt{2}-50\sqrt{7}=50(3\sqrt{2}-\sqrt{7})$.

因此，经过

$$\frac{50(3\sqrt{2}-\sqrt{7})}{40}\approx 2.0(\text{h})$$

后，A 市将受台风影响，持续影响时间为

$$\frac{100\sqrt{7}}{40}\approx 6.6(\text{h}).$$

1. 判断下列各组中直线 l 与圆 C 的位置关系：

(1) l：$x+y-1=0$，　　C：$x^2+y^2=4$；

(2) l：$4x-3y-8=0$，　　C：$x^2+(y+1)^2=1$；

(3) l：$x+y-4=0$，　　C：$x^2+y^2+2x=0$.

2. 若直线 $ax+by=1$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 相交,则点 $P(a,b)$ 与圆的位置关系是(　　).

A. 在圆上　　B. 在圆外　　C. 在圆内　　D. 不能确定

3. (1) 求过圆 $x^2+y^2=4$ 上一点 $(1,\sqrt{3})$ 的圆的切线方程；

(2) 求过原点且与圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ 相切的直线方程.

4. 求直线 $x+2y-3=0$ 被圆 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$ 截得的弦 AB 的长.

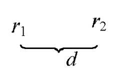
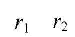
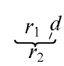
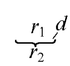
5. 从圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 外一点 $P(2,3)$ 向圆引切线,求切线长.

我们知道,两圆的位置关系有：外离、外切、相交、内切、内含. 这五种位置关系可以通过下面的步骤来判断：

计算两圆的半径 r_1，r_2；

计算两圆的圆心距 d；

根据 d 与 r_1，r_2 之间的关系,判断两圆的位置关系.

外　离	外　切	相　交	内　切	内　含
$d>r_1+r_2$	$d=r_1+r_2$	$\lvert r_1-r_2\rvert<d<r_1+r_2$	$d=\lvert r_1-r_2\rvert$	$d<\lvert r_1-r_2\rvert$
				

判断下列两圆的位置关系：

(1) $(x+2)^2+(y-2)^2=1$ 与 $(x-2)^2+(y-5)^2=16$；

(2) $x^2+y^2+6x-7=0$ 与 $x^2+y^2+6y-27=0$.

(1) 根据题意得,两个圆的半径分别为 $r_1=1$ 和 $r_2=4$,两圆的圆心距

$$d=\sqrt{[2-(-2)]^2+(5-2)^2}=5.$$

因为

$$d=r_1+r_2,$$

所以两圆外切.

(2) 将两圆的方程化为标准方程,得

$$(x+3)^2+y^2=16,\ x^2+(y+3)^2=36.$$

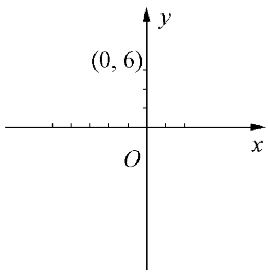
故两圆的半径分别为 $r_1=4$ 和 $r_2=6$,两圆的圆心距

$$d=\sqrt{(0-3)^2+(3-0)^2}=3\sqrt{2}.$$

因为

$$|r_1-r_2|<d<r_1+r_2,$$

所以两圆相交.



求过点(0, 6)且与圆 C: $x^2+y^2+10x+10y=0$ 切于原点的圆的方程.

如图 4－2－7,所求圆经过原点和(0, 6),且圆心应在已知圆的圆心与原点的连线上. 根据这三个条件可确定圆的方程.

将圆 C 化为标准方程,得

$$(x+5)^2+(y+5)^2=50,$$

则圆心坐标为$(-5, -5)$,半径为$5\sqrt{2}$. 所以经过此圆心和原点的直线方程为

$$x-y=0.$$

设所求圆的方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

由题意知,(0, 0), (0, 6)在此圆上,且圆心(a, b)在直线 $x-y=0$ 上,则有

$$\begin{cases}(0-a)^2+(0-b)^2=r^2,\\(0-a)^2+(6-b)^2=r^2,\\a-b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3,\\b=3,\\r=3\sqrt{2}.\end{cases}$$

于是所求圆的方程是

$$(x-3)^2+(y-3)^2=18.$$

1. 判断下列两个圆的位置关系：

(1) $(x-3)^2+(y+2)^2=1$ 与 $(x-7)^2+(y-1)^2=36$;

(2) $2x^2+2y^2-3x+2y=0$ 与 $3x^2+3y^2-x-y=0$.

2. 若圆 $x^2+y^2=m$ 与圆 $x^2+y^2+6x-8y-11=0$ 相交,求实数 m 的取值范围.

1. 过点 $P(-3, -4)$ 作直线 l,当 l 的斜率为何值时,

(1) 直线 l 将圆$(x-1)^2+(y+2)^2=4$ 平分?

(2) 直线 l 与圆$(x-1)^2+(y+2)^2=4$ 相切?

(3) 直线 l 与圆$(x-1)^2+(y+2)^2=4$ 相交,且所截得的弦长为 2?

2. 若过点$(-1,-1)$的直线l与圆$x^2+y^2-2x+6y+6=0$相交,求直线l斜率的取值范围.

3. 求半径为$\sqrt{13}$,且与直线$2x+3y-10=0$切于点$P(2,2)$的圆的方程.

4. 已知以$C(-4,3)$为圆心的圆与圆$x^2+y^2=1$相切,求圆C的方程.

5. 求圆心在y轴上,且与直线l_1:$4x-3y+12=0$,直线l_2:$3x-4y-12=0$都相切的圆的方程.

6. 已知集合$M=\{(x,y)\mid y=\sqrt{9-x^2},y\neq 0\}$,$N=\{(x,y)\mid y=x+b\}$,且$M\cap N\neq\varnothing$,求实数$b$满足的条件.

7. 已知一个圆经过直线l:$2x+y+4=0$与圆C:$x^2+y^2+2x-4y+1=0$的两个交点,并且有最小面积,求此圆的方程.

8. 已知圆C的方程是$x^2+y^2=r^2$,求证:经过圆C上一点$M(x_0,y_0)$的切线方程是$x_0x+y_0y=r^2$.

9. 已知圆C:$x^2+y^2=r^2$,直线l:$ax+by=r^2$.

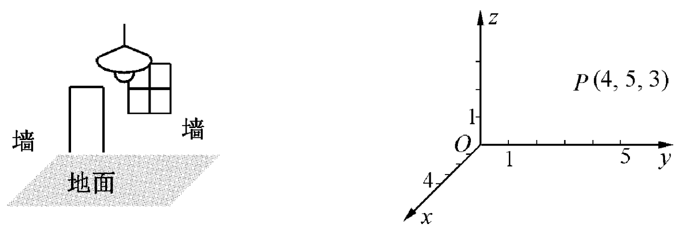
(1) 当点$P(a,b)$在圆C上时,直线l与圆C具有怎样的位置关系?

(2) 当点$P(a,b)$在圆C外时,直线l具有什么特点?

空间直角坐标系

借助平面直角坐标系，我们就可以用坐标来表示平面上任意一点的位置. 那么，怎样用坐标来表示空间任意一点的位置呢？

图 4－3－1 是一个房间的示意图，我们来探讨表示电灯位置的方法.



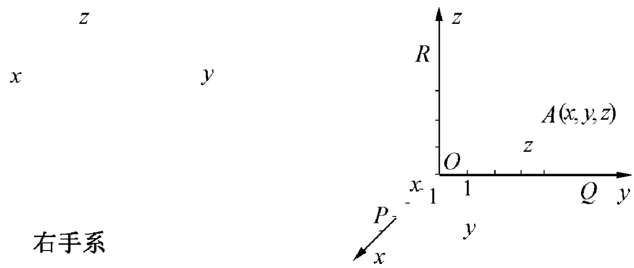
在地面上建立直角坐标系 xOy，则地面上任一点的位置只需两个坐标 x，y 就可确定. 为了确定不在地面内的物体（如电灯）的位置，需要用到第三个数表示物体离地面的高度，即需要第三个坐标 z.

例如，若这个电灯在平面 xOy 上的射影的两个坐标分别为 4 和 5，到地面的距离为 3，则可以用有序数组(4，5，3)确定这个电灯的位置（图 4－3－1）.

事实上，从空间某一个定点 O 引三条互相垂直且有相同单位长度的数轴，这样就建立了 $O-xyz$. 点 O 叫做   ，x 轴、y 轴和 z 轴叫做   ，这三条坐标轴中每两条确定一个   ，分别称为 xOy 平面、yOz 平面和 zOx 平面.

在空间直角坐标系中，让右手拇指指向 x 轴的正方向，食指指向 y 轴的正方向，若中指指向 z 轴的正方向，则称这个坐标系为   . 本书建立的坐标系都是右手直角坐标系（图 4－3－2(1)）.

通常，将空间直角坐标系画在纸上时，x 轴与 y 轴、x 轴与 z 轴均成 $135°$，而 z 轴垂直于 y 轴. y 轴和 z 轴的单位长度相同，x 轴上的单位长度为 y 轴（或 z 轴）的单位长度的一半，这样，三条轴上的单位长度在直观上大体相等.



右手系

(1)　　　　(2)

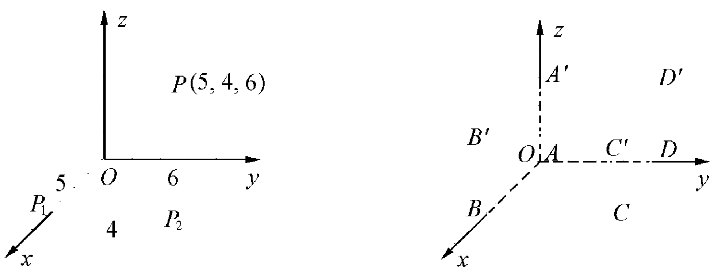
对于空间任意一点 A,作点 A 在三条坐标轴上的射影,即经过点 A 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴,它们与 x 轴、y 轴和 z 轴分别交于 P, Q, R. 点 P, Q, R 在相应数轴上的坐标依次为 x, y, z, 我们把有序实数对(x, y, z)叫做　A　　(图 4－3－2(2)),记为 $A(x, y, z)$.

在空间直角坐标系中,作出点 $P(5, 4, 6)$.

如图 4－3－3,可以按下列步骤作出点 P:

$$O \xrightarrow[\text{正方向移动 5 个单位}]{\text{从原点出发沿 } x \text{ 轴}} P_1 \xrightarrow[\text{向右移动 4 个单位}]{\text{沿与 } y \text{ 轴平行的方向}} P_2 \xrightarrow[\text{向上移动 6 个单位}]{\text{沿与 } z \text{ 轴平行的方向}} P$$

所作图如图 4－3－3 所示.



如图 4－3－4,已知长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的边长为 $AB=12$, $AD=8$, $AA'=5$. 以这个长方体的顶点 A 为坐标原点,射线 AB, AD, AA' 分别为 x 轴、y 轴和 z 轴的正半轴,建立空间直角坐标系,求长方体各个顶点的坐标.

因为

$$AB=12,\ AD=8,\ AA'=5,$$

点 A 在坐标原点,即$A(0, 0, 0)$,且点 B, D, A' 分别在 x 轴、y 轴、z 轴上,所以它们的坐标分别为

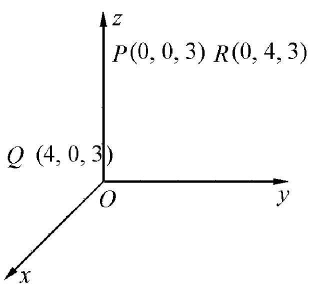
$$B(12, 0, 0),\ D(0, 8, 0),\ A'(0, 0, 5).$$

点 C, B', D' 分别在 xOy 平面、xOz 平面、yOz 平面内，坐标分别为

$$C(12,\ 8,\ 0),\ B'(12,\ 0,\ 5),\ D'(0,\ 8,\ 5).$$

点 C' 在三条坐标轴上的射影分别是点 B, D, A'，故点 C' 的坐标为 $(12,\ 8,\ 5)$.

在空间直角坐标系中，x 轴上的点、xOy 坐标平面内的点的坐标各具有什么特点？



(1) 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，画出不共线的 3 个点 P, Q, R，使得这 3 个点的坐标都满足 $z=3$，并画出图形；

(2) 写出由这三个点确定的平面内的点的坐标应满足的条件.

(1) 取三个点 $P(0,\ 0,\ 3)$, $Q(4,\ 0,\ 3)$, $R(0,\ 4,\ 3)$.

(2) P, Q, R 三点不共线，可以确定一个平面. 又因为这三点在 xOy 平面的同侧，且到 xOy 平面的距离相等，所以平面 PQR 平行于 xOy 平面，而且平面 PQR 内的每一个点在 z 轴上的射影到原点的距离都等于 3，即该平面上的点的坐标都满足 $z=3$ (图 4-3-5).

1. 在空间直角坐标系中，画出下列各点：
   $A(0,\ 0,\ 3)$, $B(1,\ 2,\ 3)$, $C(2,\ 0,\ 4)$, $D(-1,\ 2,\ -2)$.
2. 已知长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的边长为 $AB=6$, $AD=4$, $AA'=7$. 以这个长方体的顶点 B 为坐标原点，射线 BA, BC, BB' 分别为 x 轴、y 轴和 z 轴的正半轴，建立空间直角坐标系，求长方体各个顶点的坐标.
3. 写出坐标平面 yOz 内的点的坐标应满足的条件.

平面直角坐标系中的许多公式，在空间直角坐标系中有没有相应的公式？

你能根据平面直角坐标系中两点间的距离公式

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},$$

猜想空间直角坐标系中两点间的距离公式吗？

考察空间两点 $P_1(2,\ 2,\ 5)$, $P_2(5,\ 4,\ -1)$，我们来探求这两点之间的距离 P_1P_2.

如图 4-3-6，在空间直角坐标系中，以线段 P_1P_2 为对角线作长方

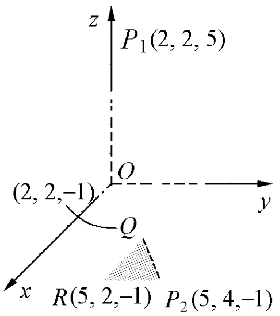
体，使它的所有棱分别与坐标轴平行，则 $Q(2,\ 2,\ -1)$，$R(5,\ 2,\ -1)$.

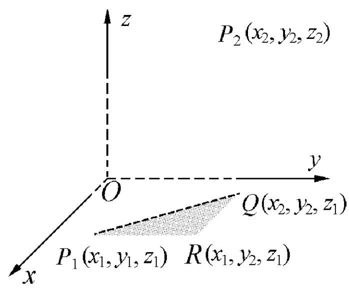
在 $\mathrm{Rt}\triangle P_2QR$ 中，

$$P_2Q=\sqrt{P_2R^2+RQ^2}.$$

在 $\mathrm{Rt}\triangle P_2QP_1$ 中，

$$\begin{aligned}P_1P_2&=\sqrt{P_2Q^2+QP_1^2}\\&=\sqrt{P_2R^2+RQ^2+QP_1^2}\\&=\sqrt{(4-2)^2+(2-5)^2+[5-(-1)]^2}\\&=7.\end{aligned}$$





一般地，空间中任意两点 $P_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$P_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$间的距离为

$$P_1P_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

如图 4－3－7，以线段 P_1P_2 为对角线作长方体，使它所有的棱都与坐标轴平行，则有 $Q(x_2,\ y_2,\ z_1)$，$R(x_1,\ y_2,\ z_1)$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle P_1QR$ 中，

$$P_1Q^2=RQ^2+P_1R^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2.$$

在 $\mathrm{Rt}\triangle P_1QP_2$ 中，

$$P_1P_2^2=P_1Q^2+P_2Q^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2.$$

故

$$P_1P_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

求空间两点 $P_1(3,\ -2,\ 5)$，$P_2(6,\ 0,\ -1)$间的距离 P_1P_2.

利用两点间距离公式，得

$$\begin{aligned} P_1P_2 &= \sqrt{(6-3)^2+[0-(-2)]^2+(-1-5)^2} \\ &= \sqrt{9+4+36}=7. \end{aligned}$$

平面上到坐标原点的距离为 1 的点的轨迹是单位圆，其方程为 $x^2+y^2=1$. 在空间中，到坐标原点的距离为 1 的点的轨迹是什么？试写出它的方程.

与坐标原点的距离为 1 的点 $P(x, y, z)$的轨迹是一个球面，满足 $OP=1$，即

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=1.$$

因此

$$x^2+y^2+z^2=1,$$

这就是所求的球面方程.

连结平面上两点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$的线段 P_1P_2 的中点 M 的坐标为$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$，那么，已知空间中两点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，$P_2(x_2, y_2, z_2)$，线段 P_1P_2 的中点 M 的坐标是什么呢？

1. 运用两点间距离公式求图 4－3－4 中线段 OC'，$B'C$ 的长度.
2. 空间中两点 $P_1(x, 2, 3)$，$P_2(5, 4, 7)$，且 $P_1P_2=6$，求 x 的值.
3. 试解释方程 $(x-12)^2+(y+3)^2+(z-5)^2=36$ 的几何意义.

1. 在空间直角坐标系中，画出下列各点：
   $A(-2, 0, 4)$，$B(-1, -3, 6)$，$C(2, -1, 4)$，$D(-1, -3, -5)$.
2. 一个长方体的 8 个顶点的坐标为$(0, 0, 0)$，$(0, 1, 0)$，$(3, 0, 0)$，$(3, 1, 0)$，$(3, 1, 9)$，$(3, 0, 9)$，$(0, 0, 9)$，$(0, 1, 9)$.
   (1) 在空间直角坐标系中画出这个长方体；
   (2) 求这个长方体的体积.
3. 已知正四棱锥 $P-ABCD$ 的底面边长为 $5\sqrt{2}$，侧棱长为 13，试建立适当的空间直角坐标系，写出各顶点的坐标.
4. 已知 $A(2, 5, -6)$，在 y 轴上求一点 P，使 $PA=7$.

5. 已知点 A，B，C 的坐标依次为$(-1, 0, 1)$，$(2, 4, 3)$，$(5, 8, 5)$，证明：这三点在同一条直线上.
6. (1) 求点 $P(4, -3, 7)$关于坐标平面 xOy 的对称点的坐标；
   (2) 求点 $P(2, 1, 4)$关于坐标原点的对称点的坐标；
   (3) 求点 $P(3, -2, 4)$关于点 $A(0, 1, -3)$的对称点的坐标.

7. 在你的教室或房间里建立适当的空间直角坐标系，以此确定电灯、门锁或开关的位置，写出相应的坐标.

解析几何的产生

在古代，对于曲线性质的研究，一直是古希腊几何学的一大内容. 希腊的数学家通过对众多曲线的研究，开始对曲线的本质有了统一的认识，他们把曲线看成是由符合一定条件的所有点组成的，从而把曲线称之为轨迹.

认识是统一了，但是在具体的研究中，又各不相同，对于各种不同的曲线，缺少一种一般的表示方法和统一的研究手段.

17 世纪前半叶，一个崭新的数学分支——解析几何学的创立，标志了近代数学的开端，并为数学的应用开辟了广阔的领域. 在创建解析几何学的过程中，法国数学家笛卡儿(Descartes，1596～1650)和费马(Fermat，1601～1665)作出了最重要的贡献，成为解析几何学的创立者.

笛卡儿 1596 年 3 月生于法国图赖纳，1650 年 2 月 11 日卒于瑞典斯德哥尔摩. 1637 年，笛卡儿发表了《几何学》，它确立了笛卡儿在数学史上的地位. 在《几何学》卷一中，他用平面上的一点到两条固定直线的距离来确定点的位置，用坐标来描述平面上的点.

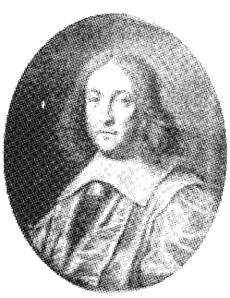
笛卡儿的解析几何有两个基本的思想：

(1) 用有序数对表示点的坐标；

(2) 把互相关联的两个未知数的代数方程，看成平面上的一条曲线.

对于坐标，笛卡儿与前人所不同的是，他不仅用坐标表示点的位置，并且通过“点动成线”的思想，把坐标具体用到了建立曲线的方程上；对于方程，笛卡儿则不仅把它看成是未知数与已知数的关系式，而是更多地把它看做是两个变量之间的关系式.

这样，他就建立了点和有序实数对之间以及曲线和方程之间的对应关系. 这是在处理代数曲线方面的数学方法上的一种突破，从而把研究曲线的几何问题转化为研究方程的代数问题，通过对方程的讨论来研究曲线的几何性质.



费马 1601 年 8 月出生在法国图卢兹，他是一位业余数学家，被后人誉为“业余数学之王”. 费马在他的《平几和立几轨迹引论》一书中，指出了对轨迹要给予一般的表示，就只能借助于代数.

费马所建立的一般方法，就是坐标法，即通过引进坐标把曲线用代数方程表示出来. 费马所用的坐标实际上是斜角坐标，但是没有标明 y 轴，而且他不用负数. 尽管他的坐标法并不那么简便，但其本质与现代解析几何是一致的.

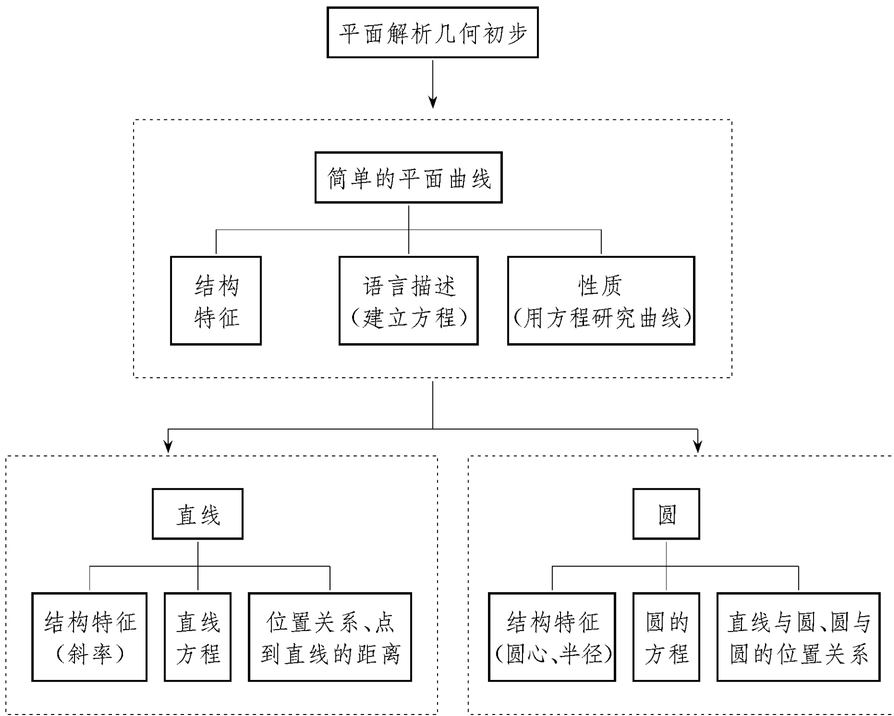
由此，历史上公认笛卡儿和费马为解析几何的奠基人. 但是笛卡

儿和费马的解析几何和现在通用的有很大的不同. 他们的书中都没有出现过现在称为“笛卡儿坐标”的直角坐标系. 笛卡儿是根据问题特点选用他的轴系，仍然属于斜角坐标. 他们的书中都没有使用“坐标”等术语. “坐标（coordinates）”一词是由德国数学家莱布尼茨（Leibniz，1646～1716）于1692年首先使用的，“横坐标（abscissa）”和“纵坐标（ordinate）”等术语也是由他引入的.

我们知道，曲线可以看做是按照某种规律运动的点的集合或轨迹. 在平面直角坐标系中，设动点 P 的坐标是 (x, y)，点 P 在运动，它的坐标 x 和 y 也随着相应地变化. 由于 P 点是按照某种规律在运动，因此 x 和 y 这两个变量相互依赖和制约，也就是说，它们之间应满足一定的关系. 这种关系用代数方法表示出来，就可以得到一个含有 x，y 两个变量的方程 $F(x, y)=0$. 这样，就建立了曲线和方程之间的对应关系.

本章回顾

本章主要研究了平面直角坐标系中直线和圆的有关知识以及空间坐标系. 学习本章时，应充分体会用坐标法研究问题的基本思想，就是用坐标、方程等代数语言描述直线和圆的几何要素及其关系，进而将直线和圆的有关问题转化为代数问题.



坐标法不仅是研究几何问题的重要方法，而且是一种广泛用于其他领域的重要数学方法. 通过坐标系，把点和坐标、曲线和方程等联系起来，沟通了几何与代数之间的联系，体现了数形结合的重要数学思想.

1. 已知过两点$(-a, 3)$，$(5, -a)$的直线的斜率为 1，求 a 的值及这两点间的距离.

2. 直线 $ax+3y-5=0$ 经过连结 $A(-1, -2)$，$B(2, 4)$ 两点线段的中点，求实数 a 的值.

3. 若直线 $mx+ny-1=0$ 经过第一、三、四象限，求实数 m，n 满足的条件.

4. 直线 l 过点 $P(-5, -4)$，且与两坐标轴围成的三角形的面积为 5 个平方单位，求直线 l 的方程.

5. 直线过点 $P(5, 6)$，它在 x 轴上的截距是在 y 轴上的截距的 2 倍，求此直线的方程.

6. 求使直线 $x+ay=2a+2$ 与直线 $ax+y=a+1$ 平行的实数 a 的值.

7. 如果点 $A(1, 3)$关于直线 l 的对称点为 $B(-5, 1)$，求直线 l 的方程.

8. 点 A 与点 $P(1, -1)$距离为 5，且到 y 轴的距离等于 4，求 A 点的坐标.

9. 若平行直线 $2x+3y-6=0$ 和 $2x+3y+a=0$ 之间的距离等于 2，求实数 a 的值.

10. 求圆 $x^2+y^2-4x+4y+4=0$ 被直线 $x-y-5=0$ 所截得的弦的长.

11. 求与点 $A(32, 10)$，$B(42, 0)$，$C(0, 0)$的距离都相等的点的坐标.

12. 设集合 $M=\{(x, y) \mid x^2+y^2 \leqslant 4\}$，$N=\{(x, y) \mid (x-1)^2+(y-1)^2 \leqslant r^2 (r>0)\}$. 当 $M \cap N=N$ 时，求实数 r 的取值范围.

13. 判断两圆 $x^2+y^2+x-2y-20=0$ 与 $x^2+y^2=25$ 的位置关系.

14. 在空间直角坐标系中作出下列点，并求两点间的距离和连结两点的线段的中点坐标：

(1) $A(-2, 4, -1)$，$B(4, -6, 7)$； (2) $C(8, 3, -2)$，$D(-4, 5, 2)$.

15. 已知平面内两点 $A(-4, 1)$，$B(3, -1)$，直线 $y=kx+2$ 与线段 AB 恒有公共点，求实数 k 的取值范围.

16. 过点 $P(1, 2)$作一直线 l，使直线 l 与点 $M(2, 3)$和点 $N(4, -5)$的距离相等，求直线 l 的方程.

17. 求证：方程 $(1+4k)x-(2-3k)y+(2-14k)=0$ 所确定的直线必经过一个定点. 并求出定点的坐标.

18. 已知点 $M(1, 3)$，$N(5, -2)$，在 x 轴上取一点 P，使得 $|PM-PN|$ 最大，求 P 点的坐标.

19. 求与圆 C：$x^2+(y+5)^2=3$ 相切，且在 x 轴、y 轴上的截距相等的直线的方程.

20. 若直线 $y=x+b$ 与曲线 $x=\sqrt{1-y^2}$ 恰有一个公共点，求实数 b 的取值范围.

21. 求圆 $x^2+y^2+2kx+k^2-1=0$ 与圆 $x^2+y^2+2(k+1)y+k^2+2k=0$ 的圆心距的最小值.

22. 在直角坐标系中，已知射线 OA：$x-y=0 (x \geqslant 0)$，OB：$\sqrt{3}x+3y=0 (x \geqslant 0)$，过点 $P(1, 0)$ 作直线分别交射线 OA，OB 于 A，B 点.

(1) 当 AB 中点为 P 时，求直线 AB 的方程；

(2) 当 AB 中点在直线 $y=\frac{1}{2}x$ 上时，求直线 AB 的方程.

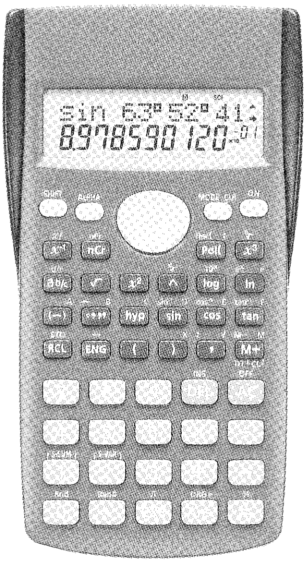
23. 点 P 在坐标平面 xOy 内，A 点的坐标为 $(0, 0, 4)$，且 $PA=5$，问满足此条件的点 P 组成什么曲线.

24. 如果将直线 $x+2y+\lambda=0$ 向左平移 1 个单位，再向下平移 2 个单位，所得直线与圆 $x^2+y^2+2x-4y=0$ 相切，求实数 λ 的值.

25. 已知圆 C: $x^2+y^2-2x+4y-4=0$，是否存在斜率为 1 的直线 l，使以 l 被圆 C 截得的弦 AB 为直径的圆过原点？若存在，求出直线 l 的方程；若不存在，说明理由.

26. 把函数 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 和 $x=b$ 之间的一段图象近似地看做直线，且设 $a<c<b$，试用 $f(a)$，$f(b)$ 来估计 $f(c)$.

计算器使用范例



(1) 200 ÷ 7 × 14 = 400

200 ÷ 7 × 14 = 400

（指定3位小数）MODE MODE MODE 1 3

400.000

(2) 2 ÷ 7, 以 3 位有效位数（SCI3）显示计算结果.

MODE MODE MODE 2 3

2 ÷ 7 = 2.86^{-01}

注：若要恢复请按 MODE MODE MODE 3 1

已知方程 $3.2x^2-9.2x+4.7=0$，试根据公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

求解方程.

3.2 SHIFT STO A (−) 9.2 STO SHIFT B

4.7 SHIFT STO C AC ALPHA

B X^2 − 4 ALPHA A ALPHA

C SHIFT STO D AC ((−) ALPHA

B + √ ALPHA D) ÷

(2 ALPHA A)

= 2.210582305

按 ◀ 键直到 B 与 √ 之间，即 + 下方，改为 −

= 0.664417695

考察某学校学生上课迟到的情况，该学校 2 308 个学生半年上课迟到次数列表如下，求总体平均数、方差.

迟到人数	0	1	2	3	4	5
人　　数	557	503	483	375	232	158

解：按 MODE 2 （进入统计状态）

SHIFT CLR 1 (Scl)（消除存储器内容）

AC 0 SHIFT ; 557 DT 1 SHIFT ; 503 DT

2 SHIFT ; 483 DT 3 SHIFT ; 375 DT

4 SHIFT ; 232 DT 5 SHIFT ; 158 DT

SHIFT S-VAR 1 （$\bar{x}$） = $\bar{x}$ 1.868284229

SHIFT S-VAR 2 (Xσn) = Xσn 1.531862405

X^2 = Ans^2 2.346602429

说　　明

江苏教育出版社出版的《普通高中课程标准实验教科书·数学》是根据2003年教育部制订的《普通高中数学课程标准(实验)》编写的.

该套教科书充分体现数学课程标准的基本理念,使学生通过高中阶段的学习,能获得适应现代生活和未来发展所必需的数学素养,满足他们个人发展与社会进步的需要.

教科书力图使学生在丰富的、现实的、与他们经验紧密联系的背景中感受数学、建立数学、运用数学,做到"入口浅,寓意深".通过创设恰当的问题情境,引导学生进行操作、观察、探究和运用等活动,感悟并获得数学知识与思想方法.在知识的发生、发展与运用过程中,培养学生的思维能力、创新意识和应用意识.

教科书按知识发展、背景问题、思想方法三条主线,通过问题将全书贯通.每个模块围绕中心教育目标展开,每章围绕核心概念或原理展开.教科书充分关注数学与自然、生活、科技、文化、各门学科的联系,让学生感受到数学与外部世界是息息相通、紧密相连的.

教科书充分考虑学生的不同需求,为所有学生的发展提供帮助,为学生的不同发展提供较大的选择空间.整个教科书设计为:一个核心(基本教学要求),多个层次,多种选择.学好核心内容后,根据需要,学生有多种选择,每一个人都能获得必备的数学素养与最佳发展.

众多的数学家、心理学家、学科教育专家、特级教师参加了本套教科书的编写工作.参与本册讨论与审稿的专家与教师有:陈光立、陈跃辉、董林伟、樊亚东、冯惠愚、蒋声、寇恒清、陆云泉、石志群、王永建、杨浩清、张松年等,在此向他们深表感谢!

本书编写组

2004年7月